دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

پارادوکس یابلو در منطق مرتبه دوم

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

پژوهشگر

محمد امین طریقی

۱۳۹۵

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌ای پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

معلمان، اساتید
و خانواده ام

بنام خدا

و من لَمْ یَشْکُرِ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرِ الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم. همچنین از استاد راهنمای بزرگوار جناب **دکتر سعید صالحی پور مهر** و اساتید و دوستانی که مشوق و راهنمای من بودند سپاسگزاری می‌کنم.

محمدامین طریقی
۱۳۹۵

نام خانوادگی دانشجو: طریقی نام: محمد امین

عنوان: پارادوکس یابلو در منطق مرتبه دوم

استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور : دکتر هژیر حومئی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۵ تعداد صفحات: ۵۴

کلید واژه‌ها: متناقض‌نما، سازگاری، $\omega-$ناسازگاری، زبان‌های مرتبه دوم، ارضانشدنی، تناهی.

چکیده

مبنای اصلی این پایان‌نامه مقاله‌های زیر است:

L.M. Picollo, Yablo's Paradox in Second-Order Languages: Consistency and Unsatisfiability, *Studia Logica* 101 (2013) 601-617.

J. Ketland, Yablo's Paradox and ω-Inconsistency, *Synthese* 145 (2005) 295–307.

استفان یابلو[۱] در سال ۱۹۹۳ پارادوکسی غیرعادی شامل لیستی نامتناهی از جملات در زبان غیرصوری ارایه کرد. بعد از معرفی دو حالت شناخته‌شده در بررسی تناقض در مجموعه‌ای از عبارات، ناسازگاری لیست جملات یابلو در زبان‌های مرتبه دوم بررسی شده‌است. در حالی که حالت اول لیست متناقض نیست، نسخه‌ی مرتبه دوم لیست متناقض می‌باشد. ازاین‌رو نتیجه می‌گیریم که لیست یابلو متناقض است و استدلال غیرصوری یابلو معتبر می‌باشد.

[۱] Stephen Yablo

فهرست مطالب

مقدمه

در پارادوکس یابلو لیستی از تعداد نامتناهی عبارات موجود است که هر کدام به عبارات پایین‌تر لیست اشاره دارد و در نظر اول از هر گونه دور اجتناب می‌کند. این پارادوکس از لیستی از جملات به شکل زیر به دست می‌آید:

Y_0: برای هر $k > 0$، Y_k درست نیست.

Y_1: برای هر $k > 1$، Y_k درست نیست.

$\vdots$

استدلال غیرصوری در مورد دنباله یابلو. فرض کنید Y_nای وجود دارد که درست است. با این فرض Y_{n+1} و همین‌طور جملات پایین Y_{n+1} درست نیستند. از نادرست بودن جملات پایین Y_{n+1} نتیجه می‌شود که Y_{n+1} درست است، تناقض! ازاین‌رو هر Y_n در دنباله غلط است. لذا هر جمله پایین Y_0 نادرست است، بنابراین Y_0 درست است و این یک تناقض است.

استدلال‌های صوری در مورد دنباله یابلو. رسیدن به تناقض در مورد لیست جملات یابلو مشکلات زیادی به همراه دارد که در تناقض آن شبهه ایجاد می‌کند. مقالات مربوط به پارادوکس یابلو تحت سه عنوان اصلی ارایه شده‌اند.

۱. مشخصه‌های تناقض در لیست

۲. وجود دور در لیست

۳. شباهت یا عدم شباهت پارادوکس یابلو به پارادوکس دروغگو (برای اطلاعات بیشتر در این مورد دو مقاله‌ی [۳۰] و [۱۳] را ببینید.)

همچنین دو پاسخ برای این پرسش که چه چیز باعث تناقض عبارت یا یک کلاس از عبارات می‌شود، بیان شده‌است:

مطابق **ایده‌ی اول** مجموعه‌ای از عبارات متناقض است اگر و تنها اگر بعضی اصول شهودی از قبل پذیرفته‌شده منجر به چنین تناقضی شوند. (مقالات شامل این ایده عبارت‌اند از: [۱۴]، [۱۵]، [۲۱] و [۲۷]). در زبان‌های صوری، این ایده به این معنا است که نظریه‌ای ناسازگار، وجود چنین مجموعه‌ای از عبارات را نتیجه می‌دهد. مطابق این ایده، در پارادوکس یابلو با فرض وجود لیست نامتناهی از جملات و استفاده از بعضی اصول حساب و اصول نظریه‌ی درستی، تناقض حاصل می‌شود. گاهی اوقات شکل ضعیف‌تر این ایده را در مقالات داریم به این شرح که: یک بیان صرفاً اشتباه باید به شکل نحوی نتیجه‌گیری شود. پارادوکس کاری[۲] که شامل گزاره‌ی زیر است و هر گزاره‌ی نادرستی را ثابت می‌کند، یک مثال روشن در این مورد می‌باشد.

$$\text{اگر } S \text{ درست باشد آنگاه پاریس پایتخت ایتالیا است} \qquad (S)$$

در **ایده‌ی دوم** یک کلاس از این‌چنین عبارات را متناقض می‌نامند، اگر و تنها اگر دادن ارزش درستی به اعضای لیست غیرممکن باشد. در واقع اگر بعضی از اعضای لیست درست باشند آنگاه همه‌ی اعضای لیست نادرست خواهند بود. البته در اینجا نیز با برخی اصول شهودی از قبل پذیرفته‌شده روبه‌رو هستیم (مقالات دربردارنده‌ی این ایده عبارت‌اند از: [۲]، [۵]، [۱۰]، [۱۵] و [۱۶]). این ایده در زبان‌های صوری با فرض وجود چنین لیستی از عبارات به برخی اصول که ارضاشدنی نیستند، اشاره دارد و مطابق آن، استدلال یابلو تلاشی است که به ما شرح می‌دهد: «تعیین ارزش درستی جملات دنباله با فرض سازگار بودن این جملات غیرممکن است.»

ما در صوری‌سازی پارادوکس یابلو روی قضیه‌ی فشردگی تأمل می‌کنیم. در زبان‌های مرتبه اول که قضیه‌ی فشردگی در آن‌ها صدق می‌کند دو ایده شرح داده شده در بالا با هم معادل‌اند؛ اما در مورد زبان‌های مرتبه‌ی بالاتر که قضیه‌ی فشردگی در این زبان‌ها صادق نیست ما روی ایده‌ی اول تمرکز می‌کنیم. البته دو پرسش داریم که باید پاسخ داده شوند:

۱. آیا لیست یابلو در ایده‌ی اول متناقض است؟

[۲] Curry's Paradox

۲. آیا لیست یابلو در ایده‌ی دوم متناقض است؟

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم پایه

۱.۱ قضایای فشردگی و تناهی

پارادوکس یابلو و عدم برقراری قضیه‌ی فشردگی در زبان‌های نامتناهی منطق گزاره‌ها

در منطق گزاره‌ها قضیه‌ی فشردگی به شکل زیر بیان می‌شود:

قضیه ۱.۱.۱. [۸] *مجموعه‌ای از فرمول‌ها صدق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی متناهی آن مجموعه صدق‌پذیر باشد.*

توماس فورستر[1] [۱۱] در سال ۱۹۹۷ با در نظر گرفتن لیست نامتناهی از نمادهای گزاره‌ای $P_1, P_2, \ldots$ یک صوری‌سازی برای پارادوکس یابلو ارایه کرد و برای هر عدد طبیعی n اصل A_n را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$A_n = \big(P_n \leftrightarrow \bigwedge_{k>n} \neg P_k\big).$$

توجه کنیم که $\bigwedge_{k>n} \neg P_k$ یک فرمول نامتناهی است. با این شرایط نظریه‌ی

$$\Gamma = \{A_n \mid n \in \omega\}$$

نظریه‌ای ناسازگار خواهد بود. در واقع ناسازگاری نظریه‌ی Γ مثال خوبی برای عدم برقراری قضیه‌ی فشردگی در زبان‌های نامتناهی است.

قضیه‌ی فشردگی در منطق مرتبه اول

در زبان مرتبه اول L مجموعه‌ای از L−جملات را یک L−نظریه می‌نامیم و قضیه‌ی فشردگی به شکل زیر بیان می‌شود:

[1] Thomas Forster

قضیه ۲.۱.۱. [۱۹] *نظریه‌ی مرتبه اول T صدق‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی T صدق‌پذیر باشد.*

در صوری‌سازی مرتبه اول پارادوکس یابلو قضیه‌ی فشردگی باعث می‌شود که یک پارادوکس بدون دور نداشته باشیم، البته شرایط در منطق مرتبه‌ی دوم متفاوت می‌باشد.

قضیه‌ی تناهی (فشردگی برهان‌ها)

قضیه ۳.۱.۱. [۲۳] *اگر جمله‌ی α توسط نظریه‌ی X ثابت شود، آنگاه $X_0 \subseteq X$ متناهی موجود است که $X_0 \vdash \alpha$.*

۲.۱ زبان‌های مرتبه دوم و عدم برقراری قضیه‌ی فشردگی در آن‌ها

در زبان‌های مرتبه دوم علاوه بر نمادهای زبان‌های مرتبه اول، نمادهایی برای متغیرهای محمولی و تابعی داریم.

متغیرهای محمولی. به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$، متغیرهای محمولی $n-$موضعی عبارت‌اند از:

$$X_1^n, X_2^n, ...$$

متغیرهای تابعی. به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$، متغیرهای تابعی $n-$موضعی عبارت‌اند از:

$$F_1^n, F_2^n, ...$$

برای اجتناب از اشتباه، متغیرهای معمولی $v_1, v_2, ...$ را متغیرهای فردی می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک ترم مرتبه دوم به شکل زیر تعریف می‌شود:

i. هر ثابت یا هر متغیر فردی یک ترم است.

ii. اگر F یک متغیر یا نماد تابعی $n-$موضعی باشد و $t_1, t_2, ..., t_n$ ترم باشند، آنگاه $F(t_1, t_2, ..., t_n)$ نیز ترم می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱. اگر P یک متغیر یا نماد محمولی $n-$موضعی باشد و $t_1, t_2, ..., t_n$ ترم باشند $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ یک فرمول اتمی مرتبه دوم می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک فرمول مرتبه دوم به شکل زیر تعریف می‌شود:

i. هر فرمول اتمی یک فرمول است.

ii. اگر ψ و φ فرمول باشند، در این صورت

$$\neg\varphi, \psi \to \varphi, \psi \wedge \varphi, \psi \vee \varphi$$

فرمول هستند.

iii. همچنین اگر φ یک فرمول و X یک متغیر آزاد فردی، تابعی یا محمولی در آن باشد، در این صورت $\forall X\, \varphi$ و $\exists X\, \varphi$ نیز فرمول می‌باشند.

تذکر ۴.۲.۱. یک ساختار مرتبه دوم مانند ساختارهای مرتبه اول متشکل از یک مجموعه‌ی مرجع به همراه تعابیر نمادهای زبان مورد نظر می‌باشد.

صدق‌پذیری در منطق مرتبه دوم. فرض کنید V مجموعه‌ی تمام متغیرهای فردی، محمولی یا تابعی باشد و s تابعی روی V باشد به طوری که

- برای متغیر فردی v، $s(v)$ یک عضو از مجموعه‌ی مرجع می‌باشد.
- برای متغیر محمولی X_i^n، $s(X_i^n)$ یک رابطه‌ی $n-$موضعی در مجموعه‌ی مرجع می‌باشد.
- برای متغیر تابعی F_i^n، $s(F_i^n)$ یک تابع $n-$موضعی که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی مرجع است، می‌باشد.

در این صورت برای ترم t، $\overline{s}(t)$ به طور طبیعی تعریف می‌شود. به ویژه اگر F یک متغیر تابعی باشد، آنگاه برای ترم‌های $t_1, t_2, ..., t_n$، $\overline{s}(F(t_1, ..., t_n))$ مقدار تابع $s(F)$ روی $\overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n)$

می‌باشد. صدق‌پذیری فرمول‌های اتمی در منطق مرتبه دوم مشابه منطق مرتبه‌ی اول می‌باشد. در واقع اگر $\mathcal{U}$ یک ساختار مرتبه دوم باشد به ازای هر متغیر محمولی $n-$موضعی X،

$$\mathcal{U} \models X_{t_1,...,t_n}[s] \text{ اگر و تنها اگر } \langle \overline{s}(t_1), ..., \overline{s}(t_n) \rangle \in s(X).$$

تنها ویژگی جدید در تعریف صدق فرمول‌های مرتبه‌ی دوم، وجود سورهای جدید که بر متغیرهای محمولی و تابعی اثر می‌کنند، می‌باشد.

- $\mathcal{U} \models \forall X_i^n\, \varphi(s)$ اگر و تنها اگر به ازای هر رابطه‌ی $n-$تایی R روی $|\mathcal{U}|$، $\mathcal{U} \models \varphi[s(X_i^n|R)]$.
- $\mathcal{U} \models \forall F_i^n\, \varphi(s)$ اگر و تنها اگر به ازای هر تابع $f : |\mathcal{U}|^n \longrightarrow |\mathcal{U}|$، $\mathcal{U} \models \varphi[s(F_i^n|f)]$.

عدم برقراری قضیه‌ی فشردگی در منطق مرتبه دوم. به ازای هر $n > 2$، یک جمله‌ی مرتبه اول λ_n داریم که جمله‌ی «حداقل n شی وجود دارد» را ترجمه می‌کند. برای مثال λ_3 عبارت است از

$$\exists x \exists y \exists z \big(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z\big)$$

مدل‌های نظریه‌ی $EC_\Delta = \{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, ...\}$ ساختارهای نامتناهی هستند. در منطق مرتبه دوم جمله‌ای وجود دارد که هم‌ارز با EC_Δ است. در واقع یک مجموعه نامتناهی است اگر و تنها اگر «یک رابطه‌ی ترتیبی در آن موجود باشد طوری که دارای آخرین عضو نباشد» که با جمله‌ی مرتبه‌ی دوم λ_∞ به شکل زیر ترجمه می‌شود:

$$\exists X \left[\forall u \forall v \forall w \big(X_{uv} \wedge X_{vw} \rightarrow X_{uw}\big) \wedge \forall u\, \neg X_{uu} \wedge \forall u \exists v\, X_{uv}\right].$$

حال هر زیرمجموعه‌ی متناهی نظریه‌ی مرتبه دوم $\{\neg\lambda_\infty, \lambda_2, \lambda_3, ...\}$ یک مدل (متناهی) دارد، اما این نظریه ناسازگار است؛ و این به معنی عدم برقراری قضیه‌ی فشردگی می‌باشد.

۳.۱ طرح یکنوایی همگن و حساب پئانو

گزاره‌ی زیر را که در آن φ فرمول مرتبه اول و ψ رابطه‌ی ۲−موضعی است *طرح یکنوایی همگن* می‌نامیم:

$$\forall x\big(\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\big[\psi(y,x) \to \neg\varphi(y)\big]\big).$$

لم ۱.۳.۱. *طرح یکنوایی همگن با اصول زیر در تناقض است.*

(a) $\forall x \exists y\, \psi(y,x)$

(b) $\forall x \forall y \forall z\big[\psi(x,y) \wedge \psi(y,z) \to \psi(x,z)\big]$

برهان. در طرح یکنوایی همگن

$$\forall x\big(\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\big[\psi(y,x) \to \neg\varphi(y)\big]\big)،$$

برای $x_\circ$ دلخواه داریم

$$\varphi(x_\circ) \leftrightarrow \forall y\big[\psi(y,x_\circ) \to \neg\varphi(y)\big].$$

با فرض راست بودن $\varphi(x_\circ)$ جمله‌ی

$$(*) \quad \forall y[\psi(y,x_\circ) \to \neg\varphi(y)]$$

نیز باید درست باشد. از (a) نتیجه می‌شود که $y_\circ$ی موجود است که $\psi(y_\circ,x_\circ)$ راست است که با توجه به $(*)$ درستی $\neg\varphi(y_\circ)$ را نتیجه می‌دهد. همچنین از (a) عنصر $z_\circ$ چنان موجود است که $\psi(z_\circ,y_\circ)$ درست است. حال از (b) داریم:

$$\psi(z_\circ,y_\circ) \wedge \psi(y_\circ,x_\circ) \to \psi(z_\circ,x_\circ).$$

از $(*)$ درست بودن $\psi(z_\circ,x_\circ)$ پس درست بودن $\neg\varphi(z_\circ)$ نتیجه می‌شود. از طرح یکنوایی همگن یابلو

داریم:

$$.\varphi(y_\circ) \leftrightarrow \big[\psi(z_\circ, y_\circ) \to \neg\varphi(z_\circ)\big]$$

درست بودن طرف دوم دوشرطی فوق درستی $\varphi(y_\circ)$ را نتیجه می‌دهد. حال تناقض به شکل

$$(**) \quad \varphi(y_\circ) \wedge \neg\varphi(y_\circ)$$

را داریم. لذا برای هر $x_\circ$، فرمول $\varphi(x_\circ)$ نادرست است. برای $x_\circ$ دلخواه

$$\varphi(x_\circ) \leftrightarrow \forall y\big(\psi(y, x_\circ) \to \neg\varphi(y)\big)$$

هنگامی درست است که $\forall y\big(\psi(y, x_\circ) \to \neg\varphi(y)\big)$ نادرست باشد. پس داریم

$$.\exists y_\circ\big(\psi(y_\circ, x_\circ) \wedge \varphi(y_\circ)\big)$$

لذا $y_\circ$ی وجود دارد که $\varphi(y_\circ)$ درست است، و این با نتیجه‌ی $(**)$ متناقض است. $\square$

اصول نظریه‌ی Q. فرض کنید $L_A = \{\circ, \mathsf{S}, +, \times\}$ زبان حساب باشد، Q یک L_A-نظریه با اصول زیر است.

۱. $\forall x[\mathsf{S}x \neq \circ]$

۲. $\forall x \forall y[\mathsf{S}x = \mathsf{S}y \to x = y]$

۳. $\forall x \exists y[x \neq \circ \to x = \mathsf{S}y]$

۴. $\forall x[x + \circ = x]$

۵. $\forall x \forall y[x + \mathsf{S}y = \mathsf{S}(x + y)]$

۶. $\forall x[x \times \circ = \circ]$

۷. $\forall x \forall y[x \times \mathsf{S}y = (x \times y) + x]$

اصول حساب پئانو. اصول موضوعه‌ی L_A−نظریه‌ی PA شامل اصول موضوعه Q و طرح استقرا که برای هر L_A−فرمول $\varphi(v,\overline{w})$ به شکل زیر است، بیان می‌گردد:

$$\forall\overline{w}\big[\varphi(0,\overline{w}) \wedge \forall v\big(\varphi(v,\overline{w}) \to \varphi(\mathsf{S}(v),\overline{w})\big) \to \forall v\varphi(v,\overline{w})\big].$$

لم ۲.۳.۱. *در اصول (a) و (b) اگر ψ را رابطه‌ی $>$ در نظر بگیریم نظریه‌ی PA این اصول را ثابت می‌کند.*

برهان. **(a):** باتوجه به این که

$$x > y \equiv \exists z[z \neq 0 \wedge x = z + y]$$

نشان می‌دهیم $\mathtt{PA} \vdash \forall x \exists y(y > x)$:

از اصل پنجم حساب پئانو نتیجه می‌شود

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x \exists y[x + \mathsf{S}y = \mathsf{S}(x+y)]$$

پس با توجه به $\forall y[\mathsf{S}y \neq 0]$ و تعریف $>$ داریم

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x \exists y[\mathsf{S}(x+y) > x]$$

و لذا

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x \exists z(z > x)$$

(b): نشان می‌دهیم

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z[x > y \wedge y > z \to \ x > z]$$

با توجه به تعریف $<$ کافی است ثابت کنیم

$$\forall x\forall y\forall z\big[\exists k_1(k_1\neq 0\wedge x=y+k_1)\wedge\exists k_2(k_2\neq 0\wedge y=z+k_2)\rightarrow$$

$$\exists k(k\neq 0\wedge x=z+k)\big]$$

در صورت وجود چنین k_1 و k_2ای قرار می‌دهیم $k=k_2+k_1$. از آنجا که $k_1\neq 0$ با توجه به این که:

$$\mathtt{PA}\vdash\forall x\exists y\big[x\neq 0\rightarrow \mathsf{S}y=x\big]$$

متغیر l چنان موجود است که $k_1=\mathsf{S}l$، پس از اصل پنجم و اصل اول حساب پئانو نتیجه می‌شود:

$$k=k_2+k_1=k_2+\mathsf{S}l=\mathsf{S}(k_2+l)\neq 0$$

هم چنین با توجه به اثبات شرکت‌پذیری جمع توسط حساب پئانو داریم:

$$(x=y+k_1\wedge y=z+k_2)\Longrightarrow x=y+k_1=(z+k_2)+k_1=z+(k_2+k_1)=z+k$$

و حکم ثابت می‌شود. $\square$

زبان مرتبه اول $L_{\mathsf{F}}=\{\times,+,0,>,\mathsf{S},\mathsf{F}\}$ را در نظر می‌گیریم، که در آن F نماد محمولی ۱−موضعی می‌باشد. طبق لم ۱.۳.۱ و لم ۲.۳.۱ نظریه‌ی

$$\mathtt{PA}\cup\Big\{\forall x\big(\mathsf{F}(x)\leftrightarrow\forall y\big[y>x\rightarrow\neg\mathsf{F}(y)\big]\big)\Big\}$$

ناسازگار است. اما در مورد نظریه‌ی

$$\mathtt{PA}_{\mathsf{F}}=\mathtt{PA}\cup\Big\{\mathsf{F}(\overline{n})\leftrightarrow\forall y\big[y>\overline{n}\rightarrow\neg\mathsf{F}(y)\big]\mid n\in\omega\Big\}$$

که در آن ω مدل استاندارد PA است و $\overline{n}$ مقدار n می‌باشد. جای بحث بیشتری وجود دارد.

تعریف ۳.۳.۱. نظریه‌ی حساب T، ω−ناسازگار است اگر و تنها اگر فرمول $\varphi(x)$ چنان موجود باشد که $T \vdash \exists x\, \varphi(x)$ و $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ برای هر $n \in \omega$.

گزاره ۴.۳.۱. *نظریه‌ی $\mathtt{PA}_{\mathsf{F}}$، ω− ناسازگار است.*

برهان. برای هر $n \in \omega$ داریم

$$\mathtt{PA}_{\mathsf{F}} \cup \{\mathsf{F}(\overline{n})\} \vdash \forall y\big(y > \overline{n} \to \neg\mathsf{F}(y)\big)$$

که نتیجه می‌دهد $\neg\mathsf{F}(\overline{\mathsf{S}n})$ را و از طرف دیگر $\forall y\big(y > \overline{\mathsf{S}n} \to \neg\mathsf{F}(y)\big)$ را، که معادل درستی $\mathsf{F}(\overline{\mathsf{S}n})$ است. این تناقض نشان می‌دهد که

(۱) برای هر $n \in \omega$، $\mathtt{PA}_{\mathsf{F}} \vdash \neg\mathsf{F}(\overline{n})$

پس برای هر $n \in \omega$، $\mathtt{PA}_{\mathsf{F}} \vdash \exists z\big[z > \overline{n} \wedge \mathsf{F}(z)\big]$ بنابراین

(۲) $\mathtt{PA}_{\mathsf{F}} \vdash \exists z\, \mathsf{F}(z)$

(۱) و (۲) ω−ناسازگاری $\mathtt{PA}_{\mathsf{F}}$ را نتیجه می‌دهد. □

قضیه ۵.۳.۱. *نظریه‌ی PA دارای مدل غیراستاندارد می‌باشد.*

برهان. b را ثابت جدید در زبان حساب پئانو در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم نظریه‌ی

$$\mathtt{PA}^* = \mathtt{PA} \cup \{b > \overline{n}\}$$

دارای مدلی مانند $\mathcal{M}$ است.

به ازای هر زیرمجموعه‌ی متناهی از $\mathtt{PA}^*$ مانند $\mathtt{PA}'$ بیشترین $n_\circ$ی موجود است که $b > \overline{n_\circ}$ در $\mathtt{PA}'$ است. در این صورت اگر $\omega^{n_\circ}$ یک مدل استاندارد حساب پئانو همراه با ثابت $n_\circ$ باشد، $\omega^{n_\circ} \models \mathtt{PA}'$ و این طبق قضیه‌ی فشردگی معادل است با این که $\mathtt{PA}^*$ دارای مدلی مانند $\mathcal{M}$ همراه با تعبیر ثابت b است که از همه اعداد طبیعی بزرگتر است. □

تذکر ۶.۳.۱. در قضیه‌ی فوق $\mathcal{M}$ را مدل غیراستاندارد $\mathtt{PA}$ و b را عضو غیراستاندارد $\mathcal{M}$ می‌نامیم.

قضیه ۷.۳.۱. *نظریه‌ی* $\mathtt{PA}_{\mathsf{F}}$ *دارای مدل غیراستاندارد می‌باشد.*

برهان. با توجه به قضیه ۵.۳.۱ قبل فرض کنیم $\mathcal{M} \models \mathtt{PA}$ یک مدل غیراستاندارد باشد و $b \in M$ یک عضو غیراستاندارد باشد. همچنین فرض کنید M جهان ساختار $\mathcal{M}$ باشد. حال (M, X) را مدل گسترش یافته‌ی زبان L_{F} در نظر می‌گیریم که در آن $X = \{b\}$ توسط محمول F تعریف می‌شود. از آنجا که X ناتهی است

$$(*) \quad (M, X) \models \exists y\, \mathsf{F}(y)$$

اما $\omega \subset M$ یک مدل استاندارد $\mathtt{PA}$ بوده لذا برای هر $n \in \omega$ داریم:

I. $(M, X) \models \neg F(\overline{n})$

از طرف دیگر برای هر $n \in \omega$ چون $b > \overline{n}$ با توجه به $(*)$ داریم:

II. $(M, X) \models \exists y\big(y > \overline{n} \wedge \mathsf{F}(y)\big)$

پس با توجه به I و II برای هر $n \in \omega$ داریم:

$$(M, X) \models \mathsf{F}(\overline{n}) \leftrightarrow \forall y\big(y > \overline{n} \to \neg\mathsf{F}(y)\big)$$

لذا $(M, X) \models \mathtt{PA}_{\mathsf{F}}$. □

۴.۱ توابع و روابط بازگشتی مقدماتی

فرض کنید $\overline{x}$ بیانگر $k-$تایی از متغیرهای $x_۱, x_۲, ..., x_k$ باشد. در این صورت تعریف تابع f توسط دو تابع g و h که از قبل می‌شناسیم، به وسیله‌ی بازگشتی مقدماتی با دو معادله‌ی زیر بیان می‌شود:

i. $f(\overline{x}, ۰) = g(\overline{x})$

ii. $f(\overline{x}, \mathsf{S}y) = h(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y))$

مثال ۱.۴.۱. در اصول حساب پئانو تابع جمع توسط تابع تصویر $I_۱^۱(x) = x$ و تابع تالی S با دو

معادله‌ی زیر به وسیله‌ی بازگشتی مقدماتی تعریف می‌شود.

$$\forall x[x + 0 = x]$$

$$\forall x \forall y[x + \mathsf{S}y = \mathsf{S}(x + y)]$$

تابع ضرب نیز توسط تابع صفر و تابع جمع با دو معادله‌ی زیر به وسیله‌ی بازگشتی مقدماتی تعریف می‌شود.

$$\forall x[x \times 0 = 0]$$

$$\forall x \forall y[x \times \mathsf{S}y = (x \times y) + x]$$

تعریف ۲.۴.۱. توصیف صوری برای توابع بازگشتی مقدماتی به شرح زیر می‌باشد.

۱. تابع مقدماتی تالی S تابع صفر $Z(x) = 0$ و توابع تصویر $I_i^k(x_1, ..., x_k) = x_i$ بازگشتی مقدماتی هستند.

۲. اگر تابع f به وسیله‌ی ترکیب توابع بازگشتی مقدماتی g و h تعریف شود، در این صورت f یک تابع بازگشتی مقدماتی خواهد بود.

۳. اگر تابع f به وسیله‌ی توابع بازگشتی مقدماتی g و h به وسیله‌ی بازگشتی مقدماتی تعریف شود، در این صورت f یک تابع بازگشتی مقدماتی خواهد بود.

تعریف ۳.۴.۱. اگر R یک رابطه‌ی k−موضعی باشد، تابع مشخصه‌ی آن $C_R : \mathbb{N}^k \longrightarrow \{0, 1\}$ می‌باشد به طوری که برای $\overline{m} \in \mathbb{N}^k$ اگر $\overline{m} \in R$، آنگاه $C_R(\overline{m}) = 0$ و اگر $\overline{m} \notin R$، آنگاه $C_R(\overline{m}) = 1$.

تعریف ۴.۴.۱. یک رابطه بازگشتی مقدماتی، رابطه‌ای است که تابع مشخصه‌ی آن بازگشتی مقدماتی باشد.

۵.۱ حسابی‌سازی نحو

کدگذاری گودل. برای هر یک از نمادهای زبان L_A کدهای مبنا به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\forall$	$\exists$	$=$	(	)	$\circ$	S	$+$	$\times$	$v_۰$	$v_۱$	$v_۲$	...
۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲	۴	۶	...

فرض کنید عبارت e شامل یک رشته از نمادها یا متغیرهای $s_۰, s_۱, ..., s_k$ باشد. برای بدست آوردن کد گودل e هر یک از s_iها را به کد مبنای c_i ارجاع می‌دهیم. فرض کنید π_i، iامین عدد اول باشد، در این صورت برای e کد گودل زیر را داریم.

$$\pi_۰^{c_۰} \times \pi_۱^{c_۱} \times ... \times \pi_k^{c_k}$$

کدگذاری دنباله‌ها. فرض کنید $e_۰, e_۱, ..., e_n$ دنباله‌ای از فرمول‌ها باشد، طوری که کد گودل فرمول e_i برابر با g_i باشد. کد گودل این دنباله از فرمول ها برابر با مقدار زیر است.

$$\pi_۰^{g_۰} \times \pi_۱^{g_۱} \times ... \times \pi_n^{g_n}$$

۶.۱ روابط و توابع بازگشتی مقدماتی مهم

۱. روابط ۱−موضعی Var(n)، Term(n)، Atom(n)، Wff(n) و Sent(n) برقرار هستند اگر n به ترتیب کد گودل یک متغیر، یک ترم، یک فرمول اتمی، یک L_A−فرمول و یک L_A−جمله باشد.

۲. رابطه‌ی ۲−موضعی Prf(m,n) برقرار است اگر m کد گودل دنباله‌ای از عبارات باشد که اثبات یک قضیه‌ی PA با کد گودل n باشد.

قضیه ۱.۶.۱. [۲۵] *روابط* Var(n)، Term(n)، Atom(n)، Wff(n)، Sent(n) *و* Prf(m,n) *بازگشتی مقدماتی هستند.*

تعریف ۲.۶.۱. قطری‌سازی فرمول $\varphi(y)$ معادل با فرمول $\exists y\big(y = \ulcorner\varphi\urcorner \wedge \varphi(y)\big)$ می‌باشد.

قضیه ۳.۶.۱. [۲۵] *تابع بازگشتی مقدماتی ۱− موضعی* Diag *موجود است که وقتی به مقدار n که*

کد گودل یک L_A-فرمول می‌باشد، اثر می‌کند، مقدار کد گودل قطری‌سازی شده‌ی فرمول φ را به ما می‌دهد.

۷.۱ اصل‌بندی بازگشتی مقدماتی

تعریف ۱.۷.۱. نظریه‌ی T دارای اصل‌بندی بازگشتی مقدماتی است هرگاه:

۱. مجموعه‌ی کدهای گودل فرمول‌ها و جملات در زبان T، بازگشتی مقدماتی باشد.

۲. مشابهاً، مجموعه‌ی کدهای گودل اصول T، بازگشتی مقدماتی باشد.

۳. مجموعه‌ی کدهای گودل $T-$اثبات‌ها، بازگشتی مقدماتی باشد.

تعریف ۲.۷.۱. نظریه‌ی T را یک نظریه‌ی مطلوب نامیم هرگاه T شامل اصول نظریه‌ی $\mathtt{Q}$ باشد و دارای اصل‌بندی بازگشتی مقدماتی باشد.

فصل ۲

پارادوکس یابلو در زبان‌های مرتبه اول

جملات در دنباله‌ی یابلو با توجه به موقعیتی که در اعداد طبیعی دارند، به یکدیگر رجوع می‌کنند. بیشتر استدلال‌های غیرصوری از برخی خواص ترتیب در اعداد طبیعی و محمول درستی استفاده می‌کنند. از آنجایی که می‌توانیم هر جمله در لیست یابلو را در زبان‌های مرتبه اول بیان کنیم، در صوری‌سازی‌های اولیه، زبان حساب مرتبه اول به همراه محمول ۱−موضعی $\mathcal{T}$ برای درستی در نظر گرفته شده‌است. توجه کنیم که منظور ما از زبان حساب، هر توسیع مرتبه اول یا مرتبه دوم زبان حساب مرتبه اول پئانو است که در آن ترم‌های جدید اضافه نمی‌شوند.

۱.۲ تعاریف و نمادگذاری‌ها

نمادگذاری ۱.۱.۲. زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ را به همراه دو نماد تابعی ۲−موضعی $+$ و $\times$ و نماد تابعی ۱−موضعی S و ثابت $\circ$ همراه نمادهایی برای تمام توابع بازگشتی مقدماتی در نظر بگیرید. همین‌طور زبان $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ را گسترشی از زبان $\mathcal{L}$ به همراه نماد محمولی ۱−موضعی $\mathcal{T}$ در نظر می‌گیریم.

نمادگذاری ۲.۱.۲. نظریه‌ی $\mathcal{PA}$ شامل اصول حساب پئانو، اصل‌بندی شده توسط زبان $\mathcal{L}$ همراه طرح استقراء برای تمام $\mathcal{L}$−فرمول‌ها بعلاوه‌ی معادلات معرف روابط و توابع بازگشتی مقدماتی به روش معمول می‌باشد.

نمادگذاری ۳.۱.۲. $\mathbb{N}$ را یک مدل استاندارد $\mathcal{PA}$ شامل تعابیر نمادهای تابعی و محمولی زبان $\mathcal{L}$ همراه با مجموعه‌ی مرجع ω شامل اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم.

نمادگذاری ۴.۱.۲. $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$−نظریه‌ی $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ را گسترشی از نظریه‌ی $\mathcal{PA}$ به طرح استقرا برای تمام $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$−فرمول‌های شامل $\mathcal{T}$ در نظر می‌گیریم.

تذکر ۵.۱.۲. نظریه‌های $\mathcal{PA}$ و $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ هر دو نظریه‌ی مطلوب می‌باشند.

نمادگذاری ۶.۱.۲. برای هر فرمول φ، $\ulcorner\varphi\urcorner$ کد گودل فرمول φ می‌باشد.

نمادگذاری ۷.۱.۲. اگر x کد گودل یک فرمول باشد و t کد گودل یک ترم باشد و v کد گودل یک متغیر باشد، آنگاه تابعی که مقدار آن برابر کد گودل فرمول حاصل از جای‌گذاری متغیری با کد

گودل v بجای ترمی با عدد گودل t از فرمولی با عدد گودل x می‌باشد، یک تابع بازگشتی مقدماتی ۳−موضعی است و در نظریه‌ی حساب به شکل $x(t/v)$ بیان می‌شود.

نمادگذاری ۸.۱.۲. $\dot{x}$ تابع بازگشتی مقدماتی می‌باشد که هر عضو را به مقدارش می‌برد.

مطابق نمادگذاری نقطه‌ای ففرمن[۱]، اگر φ یک فرمول با دقیقاً یک متغیر آزاد باشد، $\forall x\, \mathcal{T}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)$ را کوتاه‌نوشتی برای فرمول $\forall x\, \mathcal{T}(\ulcorner\varphi\urcorner(\dot{x}/v))$ در نظر می‌گیریم. در صوری‌سازی پارادوکس یابلو در زبان مرتبه اول $\mathcal{L}_\mathcal{T}$−فرمول $\forall x\, \mathcal{T}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)$ به این معنا است که برای هر x، $\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner$ عدد گودل یک فرمول درست است.

تعریف ۹.۱.۲. جمله‌ی X را نقطه‌ی ثابت فرمول $F(v)$ در نظریه‌ی S می‌نامیم هرگاه نظریه‌ی S گزاره‌ی $X \leftrightarrow F(\ulcorner X\urcorner)$ را اثبات کند.

۲.۲ صوری‌سازی پارادوکس یابلو

پارادوکس دروغگو گزاره‌ی

$$(\lambda) \qquad \lambda \text{ درست نیست}$$

می‌باشد، این عبارت در زبان $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ با گزاره‌ی دوشرطی زیر بیان می‌شود:

$$\lambda \leftrightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner\lambda\urcorner).$$

همچنین در جمله‌ی گودل G که به شکل زیر می‌باشد،

$$\forall x\, \neg \mathsf{Prf}(x, \ulcorner G\urcorner)$$

گزاره‌ی دوشرطی زیر را داریم.

$$G \leftrightarrow \forall x\, \neg \mathsf{Prf}(x, \ulcorner G\urcorner).$$

[۱] Feferman

در صوری‌سازی پارادوکس یابلو نیز مانند پارادوکس دروغگو و جمله‌ی گودل G بجای تساوی از دوشرطی استفاده می‌کنیم؛ در این صورت فرمول‌ها به خودشان یا فرمول‌های دیگر رجوع می‌کنند. از آنجا که دوشرطی‌ها فقط بین فرمول‌ها صادق هستند و بین ترم‌ها برقرار نیستند، به یک محمول $Y(x)$ نیازمندیم. $Y(x)$ را محمول یابلو می‌نامیم.

$$\mathcal{YA} = \{Y(\overline{n}) \leftrightarrow \forall x[x > \overline{n} \to \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{x})\urcorner)] | n \in \omega\}$$

برای هر $n \in \omega$، $Y(n)$ صوری‌سازی گزاره‌ی Y_n در لیست یابلو می‌باشد. گزاره‌های دوشرطی در $\mathcal{YA}$ بیانگر هم‌ارزی بین $Y(\overline{n})$ و عبارت «برای هر $m > n$، $Y(\overline{m})$ نادرست است» می‌باشد. حداقل دو راه برای اثبات برقراری دوشرطی‌ها در مجموعه‌ی $\mathcal{YA}$ در سیستم حساب مرتبه اول داریم که در مقاله‌ی پریست [۲۲] نیز بیان شده‌اند.

۱.۲.۲ روش اول صوری‌سازی پارادوکس یابلو

طرح اولیه‌ی پریست صوری‌سازی پارادوکس یابلو با معرفی نظریه‌ی $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ و لم قطری‌سازی است.

قضیه ۱.۲.۲ . حالت یکنواخت لم قطری‌سازی . *اگر نظریه‌ی T یک نظریه‌ی مطلوب باشد، آنگاه برای هر فرمول مانند $F(v, w)$ فرمول $X(w)$ چنان موجود است که*

$$T \vdash \forall w[X(w) \leftrightarrow F(\ulcorner X(w)\urcorner, w)].$$

برهان. فرمول $E(v, w)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\exists z(Diag_T(v, z) \wedge F(z, w)).$$

در فرمول فوق، با توجه به این که T نظریه‌ی مطلوب است $Diag_T$ فرمول معرف تابع بازگشتی مقدماتی `Diag` می‌باشد. حال $X(w)$ را فرمول معادل با قطری‌سازی فرمول $E(u, w)$ در نظر می‌گیریم:

$$X(w) \equiv \exists z(z = \ulcorner E\urcorner \wedge E(z, w)).$$

فرمول فوق معادل با $E(\ulcorner E\urcorner, w)$ می‌باشد و لذا

$$.T \vdash \forall w\big[X(w) \leftrightarrow \exists z\big(Diag_T(\ulcorner E\urcorner, z) \wedge F(z, w)\big)\big]$$

از آنجا که $\texttt{Diag}(\ulcorner E\urcorner) = \ulcorner X(w)\urcorner$ نتیجه می‌گیریم

$$.T \vdash \forall w\big[X(w) \leftrightarrow \exists z\big(z = \ulcorner X(w)\urcorner \wedge F(z, w)\big)\big]$$

از طرفی $\exists z\big(z = \ulcorner X(w)\urcorner \wedge F(z, w)\big)$ معادل با $F(\ulcorner X(w)\urcorner, w)$ است و بنابراین نتیجه‌ی نهایی $T \vdash \forall w\big(X(w) \leftrightarrow F(\ulcorner X(w)\urcorner, w)\big)$ را داریم. $\square$

طبق حالت یکنواخت لم قطری‌سازی برای $\mathcal{L}_\mathcal{T}$–فرمول ψ با دو متغیر آزاد x و y، $\mathcal{L}_\mathcal{T}$–فرمول φ با یک متغیر آزاد y چنان موجود است که

$$.\mathcal{PA}_\mathcal{T} \vdash \forall y\big(\varphi(y) \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi(y)\urcorner, y)\big)$$

بنابراین برای $\mathcal{L}_\mathcal{T}$–فرمول $\forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(y(\dot{x}/z)\big)\big]$ که دارای دو متغیر آزاد y و z است، داریم

$$.\mathcal{PA}_\mathcal{T} \vdash \forall z\big(Y(z) \leftrightarrow \forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner Y(x)\urcorner\big)\big]\big)$$

در مقاله‌ی [۲۲] این قضیه از $\mathcal{PA}_\mathcal{T}$ تحت عنوان یکنوایی اصل نقطه‌ی ثابت یابلو[۲] (به اختصار UFPYP) بیان شده و مطابق آن گزاره‌ی یابلو $Y(x)$ نقطه‌ی ثابت یکنواخت فرمول

$$\forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(y(\dot{x}/z)\big)\big]$$

می‌باشد (برای اطلاعات بیشتر در مورد نقطه‌ی ثابت به مقاله‌ی [۶] رجوع کنید). لیست یابلو را

[۲] The Uniform Fixed-Point Yablo Principle

می‌توان از UFPYP با نمونه‌گیری از سور عمومی و در نظر گرفتن هر $n \in \omega$ بدست آورد. اما اگر بپذیریم پارادوکس یابلو در نسخه‌ی اصلی خود دوری نیست، این روش مناسب نمی‌باشد (علاوه بر مقاله‌ی یابلو، مقالات [۲۷] و [۲۶] در رابطه با این ایده مشهور می‌باشند). اگر چه در این روش یک پارادوکس صوری داریم، اما این پارادوکس دوری می‌باشد.

بحث دوری بودن پارادوکس یابلو و جملات قطری

از گذشته، پارادوکس‌های متشکل از عباراتی که بطور مستقیم یا غیرمستقیم به خودشان یا عبارات دیگر رجوع می‌کنند، به طور شهودی دوری نامیده می‌شوند. جمله‌ی

(λ) λ درست نیست

که هسته‌ی پارادوکس دروغگو می‌باشد، به وضوح نادرست بودن خودش را بیان می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم پارادوکس دروغگو حداقل در مفهوم شهودی دوری است. این شکل از تناقض‌های معنایی معمولاً در نظریه‌های حساب شامل محمول درستی بیان می‌شوند. عبارات دوری که در این پارادوکس‌ها به کار می‌روند، معمولاً با جملاتی که آنها را «جمله‌ی قطری» می‌نامیم و بیانگر نقطه‌ی ثابت بودن یک فرمول برای یک محمول می‌باشند، صوری‌سازی می‌شوند.

تعریف ۲.۲.۲. اگر α یک جمله و ψ یک فرمول با دقیقاً یک متغیر آزاد v باشد، آنگاه

$$\alpha \leftrightarrow \psi(\ulcorner \alpha \urcorner)$$

یک جمله‌ی قطری است. همچنین اگر $\varphi(v_1, v_2, ..., v_n)$ یک فرمول با دقیقاً n متغیر آزاد $v_1, v_2, ..., v_n$ باشد و $\psi(v, v_1, v_2, ..., v_n)$ فرمول دیگری با دقیقاً $n+1$ متغیر آزاد $v, v_1, v_2, ..., v_n$ باشد

$$\forall v_1 \forall v_2 ... \forall v_n \left[\varphi(v_1, v_2, ..., v_n) \leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi(v_1, v_2, ..., v_n) \urcorner, v_1, v_2, ..., v_n)\right]$$

را یک جمله‌ی قطری می‌نامیم.

مثال ۳.۲.۲. در صوری‌سازی پارادوکس دروغگو جمله‌ی قطری $\lambda \leftrightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner\lambda\urcorner)$ را داریم که در آن گزاره‌ی λ نقطه‌ی ثابت فرمول $\neg\mathcal{T}(\ulcorner\lambda\urcorner)$ می‌باشد. همچنین مطابق تعریف فوق عبارت دوشرطی

$$\forall z\big(Y(z) \leftrightarrow \forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner Y(z)\urcorner\big)(\dot{x}/z)\big]\big)$$

یک جمله‌ی یکنواخت قطری است و با توجه به حالت یکنواخت لم قطری‌سازی، فرمول Y نقطه‌ی ثابت یکنواخت $\forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(y(\dot{x}/z)\big)\big]$ می‌باشد.

با استفاده از جملات قطری می‌توانیم مفهوم دور را در زبان‌های حساب شرح دهیم. هرگاه هسته‌ی پارادوکس صوری‌سازی شده در یک زبان حساب شامل یک جمله‌ی قطری باشد، چنین به نظر می‌رسد که پارادوکس صوری دوری است. البته این یک شرط کافی می‌باشد و شرط لازم نیست (در مقاله‌ی [۲۶] شرح داده شده‌است). در مقاله‌ی [۲۲] پریست در مورد دوری بودن پارادوکس حاصل از لم قطری‌سازی بحث کرده‌است. البته با دلایل اشتباه، او ادعا کرده که:

« ... این پارادوکس در رابطه با گزاره‌ی $\dot{s}$ (معادلاً Y) که به شکل $\forall k > x\, \neg S(k, \dot{s})$ (معادلاً $\forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner Y(z)\urcorner\big)(\dot{x}/z)\big]$) است، می‌باشد و این حقیقت که $\dot{s} = \forall k > x\, \neg S(k, \dot{s})$ (معادلاً $Y(z) \leftrightarrow \forall x\big[x > z \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner Y(z)\urcorner\big)(\dot{x}/z)\big]$) نشان می‌دهد که در اینجا ما یک نقطه‌ی ثابت $\dot{s}$ (معادلاً Y) داریم. دقیقاً مانند خودارجاعی که در مورد پارادوکس دروغگو داریم. مخلص کلام این که $\dot{s}$ (معادلاً Y) یک گزاره است، نه مقداری بزرگتر از x که این گزاره را ارضا کند، وجود دور اینجا آشکار می‌شود.»

مطابق مقاله‌ی پریست [۲۲] از آنجا که Y نقطه‌ی ثابت گزاره‌ها در لیست یابلو است، پارادوکس یابلو دارای دور می‌باشد.

گزاره ۴.۲.۲. [۶] *هر فرمول از زبان حساب مانند φ یک نقطه‌ی ثابت ضعیف گزاره‌ای دیگر در نظریه‌ی حساب است.*

برهان. اگر $\psi(x, y)$ یک فرمول دلخواه با دو متغیر آزاد در زبان حساب باشد، برای فرمول $\varphi(x)$

دوشرطی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\varphi(x) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, y)$$

با توجه به حالت یکنواخت لم قطری‌سازی، فرمول $X(x)$ چنان موجود است که

$$\forall x\big[X(x) \leftrightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \ulcorner X(x)\urcorner))\big]$$

جمله‌ی فوق یک قضیه در نظریه‌ی حساب می‌باشد و منطق نتیجه زیر را به ما می‌دهد.

$$\forall x\big[\varphi(x) \leftrightarrow (X(x) \leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \ulcorner X(x)\urcorner))\big]$$

به عبارت دیگر $\varphi(x)$ نقطه‌ی ثابت یکنواخت فرمول $X(x) \leftrightarrow \psi(y, \ulcorner X(x)\urcorner)$ می‌باشد. $\square$

این امر که فرمول‌هایی وجود دارند که نقطه‌ی ثابت بعضی گزاره‌ها هستند، اما دارای دور نیستند قابل علت‌یابی است. اما اگر معیار پریست را بپذیریم و قبول کنیم یک عبارت دارای دور است هرگاه شامل محمول‌هایی باشد که نقطه‌ی ثابت گزاره‌های دیگری هستند، به این نتیجه می‌رسیم که هر عبارت دلخواه دارای دور است و این اشتباه است. پس مطابق ادعای پریست و کوک این که صرفاً گزاره‌ای نقطه‌ی ثابت گزاره‌های دیگر باشد، دلیل کافی برای دوری بودن نیست. البته همان‌طور که گفتیم، روشن است که چنین گزاره‌ای یک جمله‌ی قطری می‌باشد. پارادوکس یابلو که توسط لم قطری‌سازی صوری‌سازی شده‌است یک پارادوکس دارای دور است و این از آنجاست که فرمول‌بندی آن درگیر UFPYP شده‌است.

طرح موضعی حساب صلب نقل قول. اگر φ یک $\mathcal{L}$–جمله باشد، مجموعه گزاره‌های به شکل زیر را *طرح موضعی حساب صلب نقل قول* نامیم:

$$\mathcal{T}(\ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow \varphi.$$

از آنجا که بنا به قضیه‌ی قطری‌سازی برای فرمول $\neg\mathcal{T}(v)$، $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$−جمله‌ی λ که شامل نماد محمولی $\mathcal{T}$ است، چنان موجود است که $\lambda \leftrightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner\lambda\urcorner)$، بنابراین طرح موضعی حساب صلب نقل قول در مورد تمام $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$−جملات با $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ ناسازگار است؛ از این رو ما این طرح را تنها در مورد $\mathcal{L}$−جملات در نظر می‌گیریم.

اصول موضعی صلب نقل قول یابلو. برای هر $n \in \omega$ دوشرطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{n})\urcorner) \leftrightarrow Y(\overline{n}).$$

قضیه ۵.۲.۲. *نظریه‌ی $\mathcal{PA}_T$ شامل اصول نظریه‌ی $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ همراه با طرح موضعی حساب صلب نقل قول و اصول موضعی صلب نقل قول یابلو ω−ناسازگار است.*

برهان. از آنجا که برای هر $n \in \omega$،

$$\mathcal{PA}_T \vdash Y(n) \leftrightarrow \forall y\big(y > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{y})\urcorner)\big).$$

لذا برای هر $n \in \omega$، با توجه به اصول موضعی صلب نقل قول یابلو داریم:

$$\mathcal{PA}_T \vdash \mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{n})\urcorner) \leftrightarrow \forall y\big(y > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{y})\urcorner)\big),$$

در این صورت اگر $\mathsf{F}(x)$ فرمول $\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{x})\urcorner)$ باشد داریم

$$\mathcal{PA}_T \vdash \mathsf{F}(\overline{n}) \leftrightarrow \forall y\big(y > \overline{n} \rightarrow \neg\mathsf{F}(y)\big).$$

اما طبق قضیه ۴.۳.۱ نظریه‌ی PA_{F}، ω−ناسازگار است، لذا $\mathcal{PA}_T$ نیز ω−ناسازگار است. $\square$

قضیه ۶.۲.۲. *نظریه‌ی $\mathcal{PA}_T$ دارای مدل غیراستاندارد می‌باشد، از این رو نظریه‌ای سازگار است.*

برهان. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک مدل غیراستاندارد $\mathcal{PA}$ با مجموعه‌ی مرجع M باشد. کافی است نشان دهیم توسیع (M, E) که در آن E تعبیر محمول درستی $\mathcal{T}$ می‌باشد، یک مدل غیراستاندارد $\mathcal{PA}_T$

است. فرض کنیم

$$E_\circ = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \mathcal{M} \models \varphi \text{ و } \varphi \text{ یک } \mathcal{L}_\mathcal{T}\text{–جمله است}\}،$$

همچنین $t(y)$ ترم $\ulcorner Y(\dot{y})\urcorner$ است که $t^{\mathcal{M}}$ تعبیر آن در ساختار $\mathcal{M}$ می‌باشد. چون $\mathcal{M}$ مدل غیراستاندارد است، اعضای غیراستاندارد b و c وجود دارند که $t^{\mathcal{M}}(b) = c$. با این شرایط اگر $E = E_\circ \cup \{c\}$ در این صورت برای هر $n \in \omega$،

$$(M, E) \models b > \overline{n} \wedge \mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{b})\urcorner)$$

یعنی برای هر $n \in \omega$،

$$(*) \quad (M, E) \models \exists y \big[y > \overline{n} \wedge \mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{y})\urcorner)\big]$$

به سادگی می‌توان دید طرح موضعی حساب صلب نقل قول در ساختار (M, E) صدق می‌کند. اگر φ یک $\mathcal{L}$–جمله باشد که $\mathcal{M} \models \varphi$، در این صورت $\ulcorner\varphi\urcorner \in E$. بنابراین نتیجه می‌گیریم $(M, E) \models \varphi$ و همین‌طور $(M, E) \models \mathcal{T}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. اگر $\mathcal{M} \not\models \varphi$ مشابهاً نتیجه می‌گیریم $(M, E) \not\models \varphi$ و همین‌طور $(M, E) \not\models \mathcal{T}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. لذا برای هر $\mathcal{L}$جمله‌ی φ داریم:

$$(M, E) \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{T}(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

نشان می‌دهیم اصول موضعی صلب نقل قول یابلو در ساختار (M, E) صدق می‌کند. از آنجا که برای هر $n \in \omega$، کد گزاره‌ی یابلو Y_n در $E_\circ$ قرار ندارد و برابر با c نیز نیست لذا

$$\ulcorner Y_n\urcorner \notin E.$$

بنابراین:

i. برای هر $n \in \omega$،

$$.(M,E) \models \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{n})\urcorner)$$

از اصل نقطه‌ی ثابت یابلو برای هر $n \in \omega$ چنین داشتیم که

$$\mathcal{PA}_{\mathcal{T}} \vdash Y(n) \leftrightarrow \forall y\big(y > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{y})\urcorner)\big)$$

از قضیه‌ی درستی داریم

$$(M,E) \models Y(n) \leftrightarrow \forall y\big(y > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{y})\urcorner)\big)$$

از $(*)$ نتیجه می‌شود:

ii. برای هر $n \in \omega$،

$$(M,E) \models \neg Y(n)$$

پس از i و ii برای هر $n \in \omega$، خواهیم داشت

$$(M,E) \models Y(n) \leftrightarrow \mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{n})\urcorner)$$

لذا (M,E) یک مدل غیراستاندارد $\mathcal{PA}_T$ است. □

در واقع همان‌طور که پریست[۲۲] و کتلند[۱۵] به ما نشان داده‌اند، اضافه کردن اصول حاکم بر محمول درستی که به اندازه‌ی کافی قوی باشند به نظریه‌ی $\mathcal{PA}_T$ آنچه را که کتلند در مقاله‌ی خود اصل یکنوایی صلب نقل قول یابلو (به اختصار UYDP)

$$.\forall x\big[\mathcal{T}\big(\ulcorner Y(\dot{x})\urcorner\big) \leftrightarrow Y(x)\big]$$

می‌نامد ثابت می‌کند و به ما اجازه می‌دهد که به تناقض برسیم اما تنها با استفاده از UFPYP به عنوان جمله‌ی قطری و این در کتلند[۱۵] به شکل زیر بیان شده است.

قضیه ۷.۲.۲. *نظریه‌ی شامل اصول $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ و اصل UYDP نظریه‌ای ناسازگار است.*

UFPYP صرفاً نظریه‌ی حسابی یا صرفاً نظریه‌ی درستی یا حتی صرفاً نظریه‌ی حسابی و نظریه‌ی درستی نیست؛ این جمله‌ای است که مطلبی را در مورد رفتار محمول یابلو بیان می‌کند؛ مطلبی که جملات دوشرطی مجموعه‌ی

$$\mathcal{YA} = \{Y(\overline{n}) \leftrightarrow \forall x[x > \overline{n} \to \neg\mathcal{T}(\ulcorner Y(\dot{x})\urcorner)] | n \in \omega\}$$

به تنهایی نتیجه نمی‌دهد و بنابراین به هسته‌ی یک پارادوکس صوری تعلق دارد. از آنجا که UFPYP یک جمله‌ی قطری است ما باید پارادوکس را دوری در نظر بگیریم. در واقع UFPYP شامل تمام دوشرطی‌های یابلو است اما این موضوع مانع روش‌های دیگر پیرامون آن نیست. روش جایگزین دیگری موجود است که شامل لیست یابلو می‌باشد و در مقاله‌ی پریست[۲۲] به آن اشاره شده‌است و در مقاله‌ی کتلند[۱۴] تعمیم یافته‌است که UFPYP را با خود همراه ندارد.

۲.۲.۲ روش دوم صوری‌سازی پارادوکس یابلو

نمادگذاری ۸.۲.۲. زبان $\mathcal{L}_{\mathcal{TY}}$ شامل تمام نمادهای زبان $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ به همراه نماد محمولی ۱−موضعی $\mathcal{Y}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید $\mathcal{PA}_{\mathcal{TY}}$ نظریه‌ی شامل اصول $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ و همه‌ی جملات دوشرطی مجموعه‌ی $\mathcal{YA}$ (بجای نماد Y نماد $\mathcal{Y}$ را در نظر می‌گیریم) و طرح استقرا در مورد تمام $\mathcal{L}_{\mathcal{TY}}$−فرمول‌های شامل $\mathcal{Y}$ باشد.

توجه کنید $\mathcal{Y}$ دیگر فرمولی نیست که طبق حالت یکنواخت لم قطری‌سازی نقطه‌ی ثابت

$$(*) \quad \forall x[x > z \to \neg\mathcal{T}(y(\dot{x}/z))]$$

باشد. بنابراین UFPYP دیگر یک قضیه از $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ یا همچنین قضیه‌ای از $\mathcal{PA}_{\mathcal{TY}}$ نمی‌باشد. با وجود این که $\mathcal{Y}$ نقطه‌ی ثابت فرمولی با دو متغیر آزاد است اما این فرمول $(*)$ نمی‌باشد و گزاره‌ی قطری UFPYP بیانگر جملات دوشرطی یابلو نخواهد بود. از آن‌جا که هیچ یک از گزاره‌های

دوشرطی در $\mathcal{YA}$ جمله‌ی قطری نیستند، هیچ دلیلی برای وجود دور در پارادوکس یابلو وجود ندارد. بنابراین اضافه کردن دوشرطی‌های یابلو به نظریه‌ی $\mathcal{PA}_{\mathcal{T}}$ با معرفی نماد محمولی ۱−موضعی $\mathcal{Y}$ راه مناسب‌تری برای تضمین موجودیت لیست است. در این مورد ما دو دلیل ارایه می‌کنیم.

اولاً، همان‌طور که در نسخه‌ی اصلی پارادوکس یابلو در مقاله‌ی [۲۹] تنها گزاره‌های لیست و نه گزاره‌های دیگر، دلیل تناقض می‌باشند. این روش به اصول حاکم بر $\mathcal{Y}$ بغیر از گزاره‌های دوشرطی در $\mathcal{YA}$ اجازه به ایجاد پارادوکس نمی‌دهد. در واقع هدف ما بررسی امکان بدست آوردن تناقض از قضایای قابل استدلال حساب و اصول نظریه‌ی درستی همراه با لیست می‌باشد و نه با UFPYP یا هر اصل دیگر حاکم بر $\mathcal{Y}$.

دوماً، درست مانند شکل غیرصوری پارادوکس یابلو در این روش ما هیچ دلیلی برای این‌که صوری‌سازی لیست یابلو را به شکل دوری در نظر بگیریم، نداریم و البته علاقه‌ی خاص ما نیز به تناقض در پارادوکس یابلو به خاطر عدم دور در آن است. از آنجا که صوری‌سازی دارای دور متناسب با بیان اصلی پارادوکس یابلو که دارای دور نیست، نمی‌باشد، این روش را کنار می‌گذاریم.

در مقاله‌ی [۱۴] به این امر توجه شده که مهم نیست کدامیک از اصول نظریه‌ی درستی را به نظریه‌ی $\mathcal{PA}_{\mathcal{TY}}$ اضافه کنیم؛ به هر حال نظریه‌ی حاصل، نظریه‌ای سازگار خواهد بود. در واقع این اصول ناسازگار نیستند و بدون در نظر گرفتن اعضای $\mathcal{YA}$ روی خودشان، با $\mathcal{PA}_{\mathcal{TY}}$ ناسازگار نمی‌باشند. همان‌طور که در مقاله‌ی [۱۱] بیان شده‌است، در این روش معمول در بدست آوردن لیست یابلو از جملات حساب به دلیل قضیه‌ی فشردگی نظریه‌ای سازگار خواهیم داشت.

گزاره ۹.۲.۲. *فرض کنیم $\mathcal{YT}$ نظریه‌ی حاصل از اضافه کردن اصل UYDP به نظریه‌ی $\mathcal{PA}_{\mathcal{TY}}$ باشد، در این صورت $\mathcal{YT}$ نظریه‌ای سازگار است.*

برهان. از آنجا که نظریه‌ی شامل اصول نظریه‌ی $\mathcal{YT}$ بدون در نظر گرفتن اعضای $\mathcal{YA}$ یا با در نظر گرفتن هر زیر مجموعه‌ی متناهی از این مجموعه، دارای مدل استاندارد می‌باشد. از این رو با توجه به قضیه‌ی فشردگی نظریه‌ی $\mathcal{YT}$ یک نظریه‌ی سازگار می‌باشد. □

با یک استدلال سرراست از یک طرف در بیان غیرصوری پارادوکس یابلو با تناقض بدون دور روبه‌رو هستیم و از طرف دیگر با توجه به این‌که زبان‌های مرتبه اول فشرده هستند، نه روش فوق و

نه صوری‌سازی دارای دور هیچ یک برای بیان پارادوکس یابلو مشروع نیستند. اما در ساختارهای قوی‌تر منطقی، قضیه‌ی فشردگی برقرار نمی‌باشد و ما در فصل سه به این موضوع خواهیم پرداخت.

صوری‌سازی لیست جملات یابلو در منطق مرتبه اول در حالت اول متناقض نیست بنابراین به ما اجازه‌ی رسیدن به تناقض را نمی‌دهد. همین‌طور مطابق روش دوم که در بالا به آن اشاره کردیم، لیست جملات یابلو متناقض نمی‌باشد. در واقع با توجه به قضیه‌ی فشردگی برای نظریه‌ی $\mathcal{YT}$ یک مدل وجود دارد و وجود این مدل مستلزم امکان واگذار کردن ارزش درستی در یک روش سازگار برای هر جمله به شکل $\mathcal{Y}(\overline{n})$ است که $n \in \omega$ می‌باشد، البته بدون در نظر گرفتن هیچ دوشرطی نادرست در $\mathcal{YA}$ و یا رد موجودیت لیست؛ از این رو نتیجه می‌گیریم که صوری‌سازی پارادوکس یابلو در منطق مرتبه اول متناقض نیست.

۳.۲ سازگاری و ω–ناسازگاری

ما دو روش برای صوری‌سازی پارادوکس یابلو معرفی کردیم. روش اول با وجود ناسازگاری دارای دور است و لذا این روش را کنار می‌گذاریم و در روش دوم با آن‌که دور نداریم اما سازگار و ارضاشدنی است. هیچ یک از این دو راه به ما تناقض بدون دور نمی‌دهد. البته در مورد روش دوم جای بحث بیشتری وجود دارد.

قضیه ۱.۳.۲. *$\mathcal{YT}$ یک نظریه‌ی ω– ناسازگار است.*

برهان. تأثیر UYDP بر جملات دوشرطی $\mathcal{YA}$ موجب می‌شود برای هر $n \in \omega$ داشته باشیم

$$\mathcal{YT} \vdash \mathcal{Y}(\overline{n}) \leftrightarrow \forall x\big(x > \overline{n} \to \neg\mathcal{Y}(x)\big).$$

بنابراین اگر محمول F را معادل محمول $\mathcal{Y}$ بدانیم، از آنجا که قبلاً نشان دادیم که PA_{F} نظریه‌ای ω–ناسازگار است، $\mathcal{YT}$ نیز ω–ناسازگار بوده و لذا نمونه‌های عددی $\neg\mathcal{Y}(\overline{n})$ برای هر $n \in \omega$ و نیز $\exists x\, \mathcal{Y}(x)$ را ثابت می‌کند. $\square$

با توجه به این که UYDP گزاره‌ای اثبات‌پذیر برای تأثیر محمول درستی بر جملات یابلو می‌باشد، از دو مقاله‌ی [۱۳] و [۱۵] به این نتیجه می‌رسیم که لیست یابلو ناسازگار نیست اما $\omega-$ناسازگار می‌باشد. با مد نظر گرفتن قضیه‌ی فشردگی، لیست یابلو همراه با نظریه‌ی حساب و اصول نظریه‌ی درستی سازگار است. سازگاری اما $\omega-$ناسازگاری لیست یابلو با مدل غیراستاندارد $\mathcal{YT}$ تضمین می‌شود و به هر نمونه‌ی عددی $\neg\mathcal{Y}(x)$ اجازه می‌دهد که درست باشد و در واقع امکان این‌که غلط باشد سربسته است. اما زبان‌های مرتبه دوم فشرده نیستند و به مدل‌های غیراستاندارد چنین اجازه‌ای نمی‌دهند، بنابراین امکان بدست آوردن پارادوکس در زبان‌های مرتبه دوم محتمل است.

فصل ۳

پارادوکس یابلو در زبان‌های مرتبه دوم

در بررسی نسخه‌ی مرتبه دوم پارادوکس یابلو از آنجا که نسخه‌ی مرتبه اول آن سازگار و البته ω−ناسازگار می‌باشد، از آن در مورد مهم‌تری استفاده می‌کنیم و آن دست یافتن به سازگاری و ارضاپذیری نسخه مرتبه‌ی دوم پارادوکس یابلو از سازگاری اما ω−ناسازگاری نظریه‌های مرتبه اول می‌باشد.

۱.۳ حساب مرتبه دوم

نمادگذاری ۱.۱.۳. $\mathcal{L}^{۲}$ را زبان مرتبه‌ی دوم شامل نمادهای غیرمنطقی زبان $\mathcal{L}$ در نظر می‌گیریم.

طرح اصل موضوعی تصریح در منطق مرتبه دوم. اگر X یک متغیر محمولی ۱−موضعی باشد، برای هر فرمول با یک متغیر آزاد $\varphi(x)$ طرح اصل موضوعی تصریح به شرح زیر است.

$$\exists X \forall x \big[X_x \leftrightarrow \varphi(x)\big]$$

اصل استقرا در منطق مرتبه دوم. در زبان مرتبه دوم $\mathcal{L}^{۲}$، نمونه‌های طرح استقرا در زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ را می‌توان با یک گزاره تحت عنوان اصل استقرا، جای‌گزین کرد. اگر X یک متغیر محمولی ۱−موضعی باشد، اصل استقرا بیان می‌کند:

$$\forall X \big[X_{\circ} \wedge \forall x \big(X_x \rightarrow X_{\mathsf{S}x}\big) \rightarrow \forall x\, X_x\big]$$

نمادگذاری ۲.۱.۳. $\mathcal{PA}^{۲}$ را یک نظریه‌ی مرتبه دوم در نظر می‌گیریم که اصول $\mathcal{PA}$ به همراه اصل استقرا در زبان مرتبه دوم، بجای نمونه‌های طرح استقرا در $\mathcal{PA}$ را شامل می‌شود. $\mathcal{L}^{۲}$−ساختار $\mathbb{N}^{۲}$ همراه مجموعه‌ی مرجع ω، یک مدل $\mathcal{PA}^{۲}$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۳. اگر $L^{۱}$ زبان مرتبه اول و $L^{۲}$ زبان مرتبه دوم شامل نمادهای غیرمنطقی $L^{۱}$ باشد و با این فرض که $A^{۱}$ یک نظریه‌ی مرتبه اول صوری‌سازی شده در $L^{۱}$ باشد، نظریه‌ی مرتبه دوم $A^{۲}$ که حاصل جای‌گذاری همگن مجموعه‌ی n−تایی متغیرها بجای حروف n−تایی در اصول طرح $A^{۱}$ و

سپس مقید ساختن تمام متغیرها توسط سورهای عمومی در قسمت بیرونی فرمول می‌باشد و بقیه‌ی اصول A^1 دست نخورده باقی می‌ماند را بازنوشت مرتبه دوم A^1 می‌نامیم.

نتیجه ۴.۱.۳. *با توجه به تعریف فوق $\mathcal{PA}^2$ بازنویسی مرتبه دوم $\mathcal{PA}$ می‌باشد.*

تذکر ۵.۱.۳. تمام قضایای نظریه‌های $\mathcal{PA}$ و $\mathcal{PA}^2$ در مدل‌های این نظریه‌ها صادق می‌باشند.

تعریف ۶.۱.۳. یک نظریه را جازم نامیم، هرگاه مدل‌های آن نظریه، با یکدیگر یکریخت باشند.

این امر که بازنویسی مرتبه دوم سازگاری اما $\omega-$ناسازگاری نظریه‌های مرتبه اول منجر به سازگاری گردد روشن نیست. مطمئناً چنین نظریه‌هایی اگر جازم باشند، فاقد مدل هستند. فرض می‌کنیم که نظریه‌ی A^2 گسترش نظریه‌ی $\mathcal{PA}^2$، صوری‌سازی شده در زبان L^2 باشد.

قضیه ۷.۱.۳. [۲۵] *نظریه‌ی $\mathcal{PA}$ جازم نیست، اما نظریه‌ی $\mathcal{PA}^2$ جازم می‌باشد.*

قضیه ۸.۱.۳. *اگر مدل $\mathcal{M}$ موجود باشد که $\mathcal{M} \models A^2$ و برای هر L^2-فرمول دلخواه $\varphi(x)$ برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{n})$ آنگاه $\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi(x)$.*

برهان. فرض کنید A^2 شامل تمام قضایای $\mathcal{PA}^2$ باشد. اگر $\mathcal{M} \models A^2$ در نتیجه $\mathcal{M} \models \mathcal{PA}^2$ با توجه به جازم بودن $\mathcal{PA}^2$، $\mathcal{M}$ با $\mathbb{N}^2$ یکریخت است. بنابراین اگر برای L^2-فرمول $\varphi(x)$ برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{n})$ آنگاه برای هر $n \in \omega$، $\mathbb{N}^2 \models \varphi(\overline{n})$. همچنین اگر ω جهان مرتبه اول $\mathbb{N}^2$ باشد $\mathbb{N}^2 \models \forall x\, \varphi(x)$ و با توجه به یکریخت بودن $\mathcal{M}$ و $\mathbb{N}^2$ نتیجه می‌گیریم $\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi(x)$. $\square$

تذکر ۹.۱.۳. توسط $\omega-$قاعده می‌توان از مجموعه جملات $\{\varphi(\overline{n}) | n \in \omega\}$ جمله‌ی $\forall x\, \varphi(x)$ را نتیجه گرفت.

قضیه ۸.۱.۳ بیانگر صحت $\omega-$قاعده در $\mathcal{PA}^2$ و هر بسطی از این نظریه می‌باشد. همچنین همراه با نظریه‌ی A^2 که معرفی کردیم، به نتیجه‌ی بعد دلالت دارد.

نتیجه ۱۰.۱.۳. *اگر A^2 یک نظریه‌ی $\omega-$ناسازگار باشد، آنگاه ارضاناپذیر است.*

برهان. فرض کنید نظریه‌ی $A^۲$، ω–ناسازگار باشد. $L^۲$–فرمول $\varphi(x)$ چنان وجود دارد که برای هر $n \in \omega$، $A^۲ \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ و البته $A^۲ \vdash \exists x\, \varphi(x)$. همچنین فرض کنید مدل $\mathcal{M}$ چنان موجود باشد که $\mathcal{M} \models A^۲$ در این صورت $\mathcal{M} \models \exists x\, \varphi(x)$ و برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{M} \models \neg\varphi(\overline{n})$ که با توجه به قضیه ۸.۱.۳ نتیجه‌ی $\mathcal{M} \models \forall x\, \neg\varphi(x)$ را خواهیم داشت که غیرممکن می‌باشد. □

نتیجه ۱۰.۱.۳ بیانگر ارضاناپذیری هر بازنویسی مرتبه دوم سازگاری اما ω–ناسازگاری نظریه‌های حساب مرتبه اول می‌باشد و حداقل در نظر اول مشاهده می‌کنیم که چنین نظریه‌ی مرتبه دومی از لحاظ معنایی به تناقض اشاره دارد. اما از آنجا که منطق مرتبه دوم ناتمامیت است، این امر برای ناسازگاری کافی نمی‌باشد و در هر صورت تناقض در حالت کلی برقرار نیست.

لم ۱۱.۱.۳. *جمله‌ی گودل G که معادل $\forall x\, \neg\mathsf{Prf}(x, \ulcorner G \urcorner)$ می‌باشد، توسط نظریه‌ی $\mathcal{PA}$ ثابت نمی‌شود. اما برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{PA} \vdash \neg\mathsf{Prf}(n, \ulcorner G \urcorner)$.*

برهان. فرض کنید $\mathcal{PA} \vdash G$ در این صورت مقدار n وجود دارد که $\mathcal{PA} \vdash \mathsf{Prf}(n, \ulcorner G \urcorner)$ و این بر خلاف جمله‌ی $\forall x\, \neg\mathsf{Prf}(x, \ulcorner G \urcorner)$ می‌باشد. بنابراین با توجه به سازگار بودن نظریه‌ی $\mathcal{PA}$، $\mathcal{PA} \nvdash G$. حال از آنجا که $\mathcal{PA} \nvdash G$، $n \in \omega$ موجود نمی‌باشد که کد گودل اثبات G در $\mathcal{PA}$ باشد، پس برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{PA} \vdash \neg\mathsf{Prf}(n, \ulcorner G \urcorner)$. □

قضیه ۱۲.۱.۳. *بازنویسی‌های مرتبه دوم از سازگاری و ω–ناسازگاری نظریه‌های مرتبه اول موجود می‌باشند که ناسازگارند.*

برهان. فرض کنید G یک جمله‌ی گودل $\mathcal{PA}$ باشد. می‌دانیم برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{PA} \vdash \neg\mathsf{Prf}(\overline{n}, \ulcorner G \urcorner)$ و البته $\mathcal{PA} \nvdash G$. حال نظریه‌ی مرتبه اول $\mathcal{PA} \cup \{\neg G\}$ که ω–ناسازگار و البته سازگار است را در نظر می‌گیریم. برای هر $n \in \omega$، $\mathcal{PA}^۲ \vdash \neg\mathsf{Prf}(\overline{n}, \ulcorner G \urcorner)$ و لذا $\mathbb{N}^۲ \models G$ پس با توجه به جازم بودن $\mathcal{PA}^۲$، G در همه‌ی مدل‌های آن صدق می‌کند لذا نظریه‌ی $\mathcal{PA}^۲ \cup \{\neg G\}$ که بازنویسی مرتبه دوم نظریه‌ی $\mathcal{PA} \cup \{\neg G\}$ است، یک نظریه‌ی ناسازگار می‌باشد. □

اگر بتوانیم قضیه‌ی ۱۲.۱.۳ را برای هر نظریه‌ی مرتبه اول سازگار و البته ω–ناسازگار لیست یابلو تعمیم دهیم آنگاه لیست یابلو پارادوکس را در حالت اولیه و اصلی ما تشکیل می‌دهد. اما آیا این

نتیجه‌ی نهایی ما خواهد بود؟ متأسفانه خیر، همان‌گونه که در قضیه‌ی بعد نشان خواهیم داد. فرض کنید A^1 یک نظریه‌ی دلخواه مرتبه اول صوری‌سازی شده در L^1 و $\varphi(x)$ یک L^1-فرمول با یک متغیر آزاد باشد، همچنین A^2 بازنویسی مرتبه دوم A^1 می‌باشد که در زبان L^2 صوری‌سازی می‌شود و نیز فرض کنید که $E = \{\varphi(\overline{n}) \mid n \in \omega\}$.

قضیه ۱۳.۱.۳. *اگر برای هر مجموعه‌ی متناهی F که $F \subseteq E$، $\mathbb{N}_F$ گسترشی از $\mathbb{N}$ باشد طوری‌که $\mathbb{N}_F \models A^1 \cup F$ آنگاه $A^2 \cup E \not\vdash \perp$.*

برهان. نشان می‌دهیم برای هر مجموعه‌ی متناهی F که $F \subseteq E$، $A^2 \cup F$ دارای یک مدل متناظر $\mathbb{N}_F^2$ می‌باشد. با در نظر گرفتن مجموعه‌ی متناهی F، ساختار $\mathbb{N}^2$ را به L^2-ساختار $\mathbb{N}_F^2$ به شکل زیر گسترش می‌دهیم:

اگر c یک ثابت منحصر به فرد از L^2 باشد، آنگاه $c^{\mathbb{N}_F^2} = c^{\mathbb{N}_F}$.

اگر f یک نماد تابعی $n-$موضعی از L^2 باشد، آنگاه $f^{\mathbb{N}_F^2} = f^{\mathbb{N}_F}$.

اگر P یک نماد محمولی $n-$موضعی L^2 باشد، آنگاه $P^{\mathbb{N}_F^2} = P^{\mathbb{N}_F}$.

حال نشان می‌دهیم که $\mathbb{N}_F^2 \models A^2 \cup F$. در مرحله‌ی اول، از آنجا که ω جهان مرتبه اول $\mathbb{N}_F^2$ است و مانند $\mathbb{N}_F$ تعبیر دقیق نمادهای غیرمنطقی L^1 را تعیین می‌کند و با توجه به این که برای هر L^1-فرمول α که $\mathbb{N}_F \models \alpha$ داریم $\mathbb{N}_F^2 \models \alpha$ از این رو $\mathbb{N}_F^2 \models A^1 \cup F$. در مرحله‌ی دوم، از آنجا که هم اصل استقرا و هم طرح اصل موضوعی تصریح در $\mathbb{N}^2$ درست می‌باشند، در ساختار $\mathbb{N}_F^2$ نیز درست می‌باشند. تنها موردی که در بسط این مدل به $\mathbb{N}_F^2$ در رجوع به اصول آن‌ها تغییر یافته، این است که بعضی نمادهای محمولی $n-$موضعی جدید با تخصیص مجموعه‌های $n-$تایی‌ها از اعضای ω که قبلاً قسمتی از حوضه‌ی مجموعه‌ی متغیرها بودند در ساختار جدید تعبیرپذیر می‌باشند. البته اگر از آن‌ها به جهت عدم داشتن نام استفاده کنیم این امر اهمیت چندانی نخواهد داشت و لذا $\mathbb{N}_F^2 \models A^2 \cup F$. حال اگر فرض کنیم که $A^2 \cup E \vdash \perp$، طبق قضیه‌ی تناهی ما فقط تعداد متناهی از اعضای مجموعه‌ی E که می‌توانند در اثبات بکار گرفته شوند را مد نظر داریم. اگر F مجموعه‌ی همه‌ی چنین اعضایی باشد، در این صورت $A^2 \cup F \vdash \perp$ که درست نیست زیرا قبلاً نشان دادیم که برای هر $F \subseteq E$ که متناهی می‌باشد، $A^2 \cup F$ دارای مدل است. □

مطابق قضیه‌ی ۱۳.۱.۳ اگر فرمول‌های بی‌شمار برای ω−ناسازگاری یک نظریه‌ی مرتبه اول ضروری باشند، بازنوشت مرتبه دوم آن نظریه، سازگار خواهد بود. بعداً خواهیم دید که این‌چنین نظریه‌هایی وجود دارند و نتیجه می‌گیریم که هر نظریه‌ی مرتبه اول ω−ناسازگار دارای یک بازنوشت مرتبه دوم می‌باشد و لذا جست‌وجو برای نتیجه‌ی اصلی بی‌فایده می‌باشد. در واقع همه‌ی بازنوشت‌های مرتبه دوم نظریه‌های مرتبه اول ω−ناسازگار، ناسازگار نیستند. البته قضیه ۱۳.۱.۳ یک روش اساسی برای ما ارایه می‌کند که اگر ω−ناسازگاری یک نظریه‌ی مرتبه اول حاصل از اضافه کردن بی‌نهایت جمله به آن باشد، بازنوشت مرتبه دوم آن سازگار می‌باشد. در زبان‌های مرتبه دوم نیز مانند زبان‌های مرتبه اول دو روش برای تضمین لیست موجود است. روش اول این که لم قطری‌سازی را در نظر بگیریم که در این صورت یک پارادوکس دارای دور خواهیم داشت و البته، این مطلوب ما نیست. روش دوم معرفی نماد محمولی جدید $\mathcal{Y}$ به زبان حساب می‌باشد و روی این روش تمرکز خواهیم کرد. اولین نگرانی ما در مورد بازنویسی مرتبه دوم $\mathcal{YT}$ می‌باشد. توجه کنیم که اگر این نظریه سازگار اما ω−ناسازگار باشد بعضی نتایج که در فصل قبل بیان کردیم قابل استفاده می‌باشند.

نمادگذاری ۱۴.۱.۳. فرض کنیم که $\mathcal{YT}^{۲}$ بازنویسی مرتبه دوم $\mathcal{YT}$ باشد، همچنین فرض کنید $\mathcal{L}^{۲}_{\mathcal{TY}}$ زبانی باشد که $\mathcal{YT}^{۲}$ با آن صوری‌سازی می‌شود.

در رابطه با اصول، $\mathcal{YT}^{۲}$ تنها در حالت استقرایی متفاوت از $\mathcal{YT}$ می‌باشد. طبق آنچه که قبلاً گفتیم هر نمونه از طرح استقرا در $\mathcal{YT}$ را با یک گزاره یعنی اصل استقرا جایگزین می‌کنیم. این اصل حساب همراه طرح اصل موضوعی تصریح به ما این امکان را می‌دهد که همه‌ی نمونه‌های مرتبه اول طرح استقرا را داشته باشیم. بنابراین هر اصل $\mathcal{YT}$ یک قضیه‌ی $\mathcal{YT}^{۲}$ می‌باشد و لذا همان‌گونه که $\mathcal{YT}$ نظریه‌ای ω−ناسازگار است، $\mathcal{YT}^{۲}$ نیز ω−ناسازگار می‌باشد. از آنجا که قضیه‌ی فشردگی در مورد $\mathcal{YT}^{۲}$ کاربرد ندارد و با توجه به نتیجه‌ی حاصل از جازم بودن $\mathcal{YT}^{۲}$، هیچ مدل ناخواسته‌ای برای تضمین سازگاری در آن وجود ندارد و شاید بر این باور باشیم که این نظریه همانند بازنوشت مرتبه دوم نظریه‌ی $\mathcal{PA}^{۲} \cup \{\neg G\}$ به سادگی ناسازگار می‌باشد.

۲.۳ صورت مرتبه دوم پارادوکس یابلو

متأسفانه حساب مرتبه دوم نیز مانند حساب مرتبه اول برای بازتاب نسخه‌ی اصلی دلایل غیرصوری یابلو به اندازه‌ی کافی قوی نیست و از $\mathcal{YT}^{2}$ تناقض بدست می‌آید. نظریه‌ی $\mathcal{YT}^{2}$ قابل مقایسه با $\mathcal{PA}^{2} \cup \{\neg G\}$ نیست و برخلاف آن در فرض قضیه‌ی ۱۳.۱.۳ صدق می‌کند. نتیجه‌ی بعد این امر را تصدیق می‌کند.

نتیجه ۱.۲.۳. *$\mathcal{YT}^{2}$ یک نظریه‌ی سازگار است.*

برهان. فرض کنید $\mathcal{PA} \cup \{\mathrm{UYDP}\}$ (به همراه تمام نمونه‌های طرح استقرا در مورد $\mathcal{L}_{\mathcal{TY}}-$فرمول‌ها) بجای A^{1} در قضیه ۱۳.۱.۳ باشد و نیز $\mathcal{YA}$ را بجای E در این قضیه در نظر می‌گیریم. برای هر مجموعه‌ی متناهی $F \subseteq \mathcal{YA}$ ما مدل $\mathbb{N}$ را به ساختار $\mathbb{N}_F$ به شکل زیر گسترش می‌دهیم.

- اگر $F = \varnothing$ فرض کنید $\mathcal{Y}^{\mathbb{N}_F} = \mathcal{T}^{\mathbb{N}_F} = \varnothing$.
- اگر $F \neq \varnothing$ از آنجا که F متناهی است $m \in \omega$ چنان وجود دارد که

$$\mathcal{Y}(\overline{m}) \leftrightarrow \forall x\big[x > \overline{m} \to \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner\big)\big] \in F،$$

و برای هر $n \in \omega$ که $n > m$،

$$\mathcal{Y}(\overline{n}) \leftrightarrow \forall x\big[x > \overline{n} \to \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner\big)\big] \notin F.$$

فرض کنید $\mathcal{Y}^{\mathbb{N}_F} = \{m\}$ و $\mathcal{T}^{\mathbb{N}_F} = \{\text{عددگودل } \mathcal{Y}(\overline{m})\}$. ثابت می‌کنیم که برای هر $F \subseteq \mathcal{YA}$ که متناهی است، داریم:

$$\mathbb{N}_F \models \mathcal{PA} \cup \{\mathrm{UYDP}\} \cup F.$$

اولاً، هر اصل $\mathcal{PA}$ که شامل $\mathcal{T}$ یا $\mathcal{Y}$ نیست چون در $\mathbb{N}$ درست است پس در $\mathbb{N}_F$ نیز درست می‌باشد. دوماً، اگر $F = \varnothing$ آنگاه

$$\mathbb{N} \models \forall x\big[\mathcal{Y}(x) \leftrightarrow x \neq x \land \mathcal{T}(x) \leftrightarrow x \neq x\big]$$

زیرا $\mathcal{Y}^{\mathbb{N}_F} = \mathcal{T}^{\mathbb{N}_F} = \varnothing$؛ بنابراین تمام نمونه‌های طرح استقرا که شامل $\mathcal{T}$ و $\mathcal{Y}$ هستند، درست می‌باشند زیرا فرمول‌هایی که بجای $\mathcal{T}(x)$ و $\mathcal{Y}(x)$ شامل $x \neq x$ هستند، در طرح استقرا صادق هستند. به دلیل این که $\mathbb{N} \models \forall x\, \neg\mathcal{T}(x)$، UYDP تنها به شکل $\forall x\big(\mathcal{T}\ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner \leftrightarrow x \neq x\big)$ در $\mathbb{N}_F$ درست می‌باشد. اگر $F \neq \varnothing$ آنگاه

$$\mathbb{N}_F \models \forall x\big[(\mathcal{Y}(x) \leftrightarrow x = \overline{m}) \wedge (\mathcal{T}(x) \leftrightarrow x = \ulcorner\mathcal{Y}(\overline{m})\urcorner)\big]$$

زیرا $\mathcal{Y}^{\mathbb{N}_F} = \{m\}$ و $\mathcal{T}^{\mathbb{N}_F} = \{\text{عددگودل } \mathcal{Y}(\overline{m})\}$ و دوباره تمام نمونه‌های طرح استقرا که شامل $\mathcal{T}$ و $\mathcal{Y}$ هستند درست می‌باشند زیرا فرمول‌هایی که به ترتیب بجای $\mathcal{Y}(x)$ و $\mathcal{T}(x)$ شامل $x = \overline{m}$ و $x = \ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner$ هستند در طرح استقرا صادق هستند. $\mathbb{N}_F \models \text{UYDP}$ زیرا

$$\mathbb{N}_F \models \mathcal{T}(\ulcorner\mathcal{Y}(\overline{m})\urcorner) \wedge \mathcal{Y}(\overline{m})$$

و همین‌طور برای هر $n \in \omega$ که $n \neq m$ داریم $\mathbb{N}_F \models \neg\mathcal{T}(\ulcorner\mathcal{Y}(\overline{n})\urcorner) \wedge \neg\mathcal{Y}(\overline{n})$ و سرانجام $\mathbb{N}_F \models F$. زیرا اگر

$$\mathcal{Y}(\overline{n}) \leftrightarrow \forall x\big[x > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner\big)\big] \in F.$$

اگر $n = m$، آنگاه $\mathbb{N}_F \models \mathcal{Y}(\overline{n})$ و لذا

$$\mathbb{N}_F \models \forall x\big[x > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner\big)\big]،$$

از آنجا که m تنها عضو $\mathcal{Y}^{\mathbb{N}_F}$ است و اگر $n \neq m$ آنگاه با توجه به شرایطی که در ابتدا برای ساختار $\mathbb{N}_F$ بیان کردیم

$$\mathbb{N}_F \models \neg\mathcal{Y}(\overline{n}) \wedge \neg\forall x\big[x > \overline{n} \rightarrow \neg\mathcal{T}\big(\ulcorner\mathcal{Y}(\dot{x})\urcorner\big)\big]،$$

پس با توجه به قضیه ۱۳.۱.۳ داریم $\mathcal{YT}^{2} \nvdash \perp$. □

ما برای اثبات قضیه‌ی ۱۳.۱.۳ از یک فراقضیه‌ی قوی استفاده کردیم و نتیجه ۱.۲.۳ یک نتیجه‌ی قضیه‌ی تناهی در حساب مرتبه دوم می‌باشد. مطابق این مطلب، اگر نتوانیم از هر زیرمجموعه‌ی

متناهی یک مجموعه‌ی نامتناهی تناقض داشته باشیم، در مورد مجموعه‌ی اصلی نیز تناقض نخواهیم داشت. با این شرایط، وضعیت پارادوکس یابلو این‌گونه می‌باشد که هر زیرمجموعه‌ی متناهی مجموعه‌ی گزاره‌های دوشرطی یابلو دارای مدل می‌باشد و از این رو ناسازگار نیست. بنابراین، هیچکدام لیستی بدون اشکال نیستند. قضیه‌ی تناهی به ما اجازه می‌دهد که سازگار بودن نظریه‌ی $\mathcal{YT}^{۲}$ که از نتیجه ۱.۲.۳ داریم را به هر نظریه‌ی دیگر که به اصول مختلف (اما اثبات‌پذیر) نظریه‌ی درستی برای بررسی دوشرطی‌های یابلو مخصوصاً در مورد شکل مرتبه دوم آن توجه کند، گسترش دهیم. فرض کنید $A^{۲}$ یک نظریه‌ی دلخواه حساب مرتبه دوم باشد که توسط زبان $\mathcal{L}^{۲}_{\mathcal{TY}}$ صوری‌سازی شده‌است و نیز فرض کنید $\mathcal{TT}$ مجموعه‌ی اصول اثبات‌پذیر حاکم بر محمول درستی صوری‌سازی شده در همان زبان باشد.

نتیجه ۲.۲.۳. *اگر برای هر $F \subseteq \mathcal{YA}$ متناهی $A^{۲} \cup \mathcal{TT} \cup F \nvdash \bot$ آنگاه $A^{۲} \cup \mathcal{TT} \cup \mathcal{YA} \nvdash \bot$.*

برهان. به طور مستقیم از قضیه‌ی تناهی بدست می‌آید. □

اگر ما بخواهیم از لیست یابلو در یک زبان مرتبه دوم تناقض بدست آوریم دو حالت داریم. هر کدام از اصول نظریه‌ی درستی و حساب مورد نظر ما با خودشان ناسازگار هستند. ما در هر حالت نمی توانیم بدانیم که آیا در ناسازگاری لیست یابلو اشکال وجود دارد؟ آیا لیست یابلو متناقض است؟ یا در حالت اول متناقض نمی‌باشد؟ یا فقط تعداد متناهی از دوشرطی‌های یابلو برای بدست آوردن تناقض لازم می‌باشد، در این صورت ما از بخشی از دلایل نیمه صوری‌سازی شده‌ی متن اصلی پارادوکس یابلو استفاده می‌کنیم که یک روش مهم و البته ناخوشایند می‌باشد. این مهم نیست که ما کدامیک از اصول نظریه‌ی درستی را مد نظر بگیریم. زمانی که این اصول را بپذیریم، هر گاه این اصول اثبات‌پذیر باشند، نظریه‌ی حاصل سازگار خواهد بود. با این حال، در حالت دوم $\mathcal{YT}^{۲}$ دارای تناقض است. در نتیجه‌ی زیر نشان می‌دهیم که $\mathcal{YT}^{۲}$ به لحاظ معنایی دارای تناقض می‌باشد.

نتیجه ۳.۲.۳. *$\mathcal{YT}^{۲}$ صدق‌پذیر نمی‌باشد.*

برهان. $\mathcal{YT}$ نظریه‌ای $\omega-$ناسازگار می‌باشد و برای هر $n \in \omega$ داریم:

$$\mathcal{YT} \vdash \neg\mathcal{Y}(\overline{n})$$

همچنین $\mathcal{YT} \vdash \exists x\, \mathcal{Y}(x)$ و بنابراین $\mathcal{YT} \nvdash \forall x\, \neg \mathcal{Y}(x)$. مجموعه‌ی مدل‌های $\mathcal{YT}^{۲}$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مدل‌های نظریه‌ی $\mathcal{PA}^{۲}$ است و لذا $\mathcal{YT}^{۲}$ جازم می‌باشد. از قضیه‌ی ۸.۱.۳ و جازم بودن $\mathcal{YT}^{۲}$ نتیجه می‌گیریم که جمله‌ی $\forall x\, \neg \mathcal{Y}(x)$ در تمام مدل‌های $\mathcal{YT}^{۲}$ صدق می‌کند و این تناقض می‌باشد زیرا قضایای $\mathcal{YT}$، قضایای $\mathcal{YT}^{۲}$ می‌باشند و لذا $\mathcal{YT}^{۲} \vdash \exists x\, \mathcal{Y}(x)$. □

این حقیقت که $\mathcal{YT}^{۲}$ فاقد مدل می‌باشد، با فرض $\mathcal{PA}^{۲}$ و UYDP نتیجه می‌دهد که هیچ راهی برای تعیین ارزش درستی جملات یابلو (عبارات به شکل $\mathcal{Y}(\overline{n})$) که بیان می‌کنند:

$$\forall x \big[x > \overline{n} \rightarrow \neg \mathcal{T} \big(\ulcorner \mathcal{Y}(\dot{x}) \urcorner \big) \big]$$

به طور سازگار وجود ندارد. زیرا نشان دادیم $\mathcal{PA}^{۲} \cup \{\text{UYDP}\}$ دارای یک مدل می‌باشد. از طرفی ارضاناپذیری $\mathcal{YT}^{۲}$ نشان می‌دهد که در نظر گرفتن هر دوشرطی در لیست یابلو امکان‌پذیر نبوده، پس حداقل یکی از آن‌ها باید نادرست باشد. بنابراین برای یک دوشرطی

$$\mathcal{Y}(\overline{m}) \leftrightarrow \forall x \big[x > \overline{m} \rightarrow \neg \mathcal{T} \big(\ulcorner \mathcal{Y}(\dot{x}) \urcorner \big) \big]$$

یا $\mathcal{Y}(\overline{m})$ ارزش درستی درست می‌گیرد و $\forall x \big[x > \overline{m} \rightarrow \neg \mathcal{T} \big(\ulcorner \mathcal{Y}(\dot{x}) \urcorner \big) \big]$ نادرست است، یا بر عکس $\mathcal{Y}(\overline{m})$ ارزش نادرست می‌گیرد پس $\forall x \big[x > \overline{m} \rightarrow \neg \mathcal{T} \big(\ulcorner \mathcal{Y}(\dot{x}) \urcorner \big) \big]$ درست است.

نتیجه‌گیری

صوری‌سازی دنباله‌ی یابلو در زبان مرتبه اول در هیچ یک از دو حالتی که در مقدمه به آن اشاره کردیم، منجر به تناقض نخواهد شد. در واقع، نه بدست آوردن تناقض از نظریه‌ی حساب و اصول نظریه‌ی درستی همراه با لیست یابلو در حساب مرتبه اول و نه صوری‌سازی بخشی از دلایل یابلو در نسخه‌ی اصلی، هیچ یک ممکن نیست. همچنین در حساب مرتبه دوم نیز از نظریه‌ی حساب و اصول نظریه درستی همراه با لیست یابلو نمی‌توانیم تناقض داشته باشیم. بنابراین، پارادوکس یابلو در منطق مرتبه دوم در حالت اول متناقض نیست. ممکن است به این نتیجه برسیم که همان‌طور که ظاهر ساده‌ی آن نامعتبر می‌باشد، استدلال اصلی یابلو نیز به لحاظ منطقی نادرست است و لیست جملات یابلو غیرمتناقض می‌باشد. با این حال طبق نتیجه ۳.۲.۳ استنتاج معتبر نیست زیرا این استدلال مرتبه دوم به طور معنایی معتبر می‌باشد. اگر ما ایده مرتبه دوم نتیجه‌ی منطقی را بپذیریم در این صورت نه حساب مرتبه اول و نه حساب مرتبه دوم برای بیان استدلال یابلو به اندازه‌ی کافی قوی نمی‌باشند. البته منطق مرتبه دوم مزیت بیشتری نسبت به منطق مرتبه اول دارد و با در نظر گرفتن استدلال شهودی که به لحاظ معنایی معتبر است، آن ارضاناپذیری $\mathcal{YT}^{2}$ را ثابت می‌کند. بنابراین، اختصاص ارزش درستی بر جملات یابلو به طور سازگار غیرممکن می‌باشد و لذا در حالت دوم، منطق مرتبه دوم با در نظر گرفتن دنباله یابلو متناقض است و برای بازتاب استدلال اصلی یابلو کافی می‌باشد در حالی که در منطق مرتبه اول چنین عملی ممکن نیست.

مراجع

[1] E. Barrio, Theories of Truth Without Standard Models and Yablo's Sequences, *Studia Logica,* Vol. 96 (2010), pp. 375–391.

[2] N. Belnap, and A. Gupta, The Revision Theory of Truth, *MIT Press, Cambridge,* 1993.

[3] T. Bolander, V. F. Hendricks, and S. A. Pedersen (eds.), Self-Reference, *CSLI Publications, Stanford,* 2004.

[4] M. Clark, Paradoxes from A to Z, *Routledge, Londen and New York*, 2007.

[5] R. T. Cook, Patterns of Paradox, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 69 (2004), pp. 767–774.

[6] R. T. Cook, There Are Non-Circular Paradoxes (But Yablo's Isn't One of Them!), *The Monist,* Vol. 89 (2006), pp. 118–149.

[7] R. Dedekind, Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?, in: William B. Ewald (ed.), From Kant to Hilbert: A Source Book in The Foundations of Mathematics, *Oxford University Press, Oxford,* 1996, pp. 787–832.

[8] H. B. Enderton, A Mathematical Introduction to Logic, *Academic Press, Harcourt,* 2001.

[9] W. B. (ed.) Ewald, From Kant to Hilbert: A Source Book in The Foundations of Mathematics, *Oxford University Press,* 1996.

[10] H. Field, Saving Truth from Paradox, *Oxford University Press,* 2008.

[11] T. Forster, Yablo's Paradox and The Omitting Types Theorem for Propositional Languages, *Logique et Analyse,* Vol. 54 (2011), pp. 323–326.

[12] V. Halbach, Axiomatic Theories of Truth, *Cambridge University Press,* 2011.

[13] J. Hardy, Is Yablo's Paradox Liar-Like?, *Analysis,* Vol. 55 (1995), pp. 197–198.

[14] J. Ketland, Bueno and Colyvan on Yablo's paradox, *Analysis,* Vol. 64 (2004), pp. 165–172.

[15] J. Ketland, Yablo's Paradox and ω-Inconsistency, *Synthese,* Vol. 145 (2005), pp. 295–307.

[16] S. Kripke, Outline of A Theory of Truth, *The Journal of Philosophy,* Vol. 72 (1975), pp. 690–716.

[17] H. Leitgeb, Theories of Truth Which Have No Standard models, *Studia Logica,* Vol. 68 (2001), pp. 69–87.

[18] H. Leitgeb, What Is A Self-Referential Sentence? Critical Remarks On The Alleged (Non-)Circularity of Yablos Paradox, *Logique and Analyse,* Vol. 177 (2002), pp. 3–14.

[19] D. Marker, Model Theory: An Introduction, *Springer, Chicago,* 2002.

[20] L.M. Picollo, Yablo's Paradox in Second-Order Languages: Consistency and Unsatisfiability, *Studia Logica,* Vol. 101 (2013), pp. 601-617.

[21] G. Priest, The Structure of The Paradoxes of Self-Reference, *Mind,* Vol. 103 (1994), pp. 25–34.

[22] G. Priest, Yablo's Paradox, *Analysis,* Vol. 57 (1997), pp. 236–242.

[23] W. Rautenberg, A Concise Introduction to Mathematical Logic, *Springer, Berlin,* 2010.

[24] S. Shapiro, Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic, *Oxford University Press,* 1991.

[25] P. Smith, An Introduction to Gödel's Theorems, *Cambridge University Press, Cambridge,* 2013.

[26] R. A. Sorensen, Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars, *Mind,* Vol. 107 (1998,) pp. 137–155.

[27] N. Tennant, On Paradox Without Self-Reference, *Analysis,* Vol. 55 (1995), pp. 199–207.

[28] S. Yablo, Truth and Reflexion, *Journal of Philosophical Logic,* Vol. 14 (1985), pp. 297–349.

[29] S. Yablo, Paradox Without Self-Reference, *Analysis,* Vol. 53 (1993), pp. 251–252.

[30] S. Yablo, Circularity and Paradox, in: T. Bolander, V. F. Hendricks, and S. A. Pedersen (eds.), Self-Reference, *CSLI Publications,* 2004, pp. 139–157.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اصل بندی	Axiomatization
اصل موضعی صلب نقل قول یابلو	Local Yablo Disquotation Principle
اصل یکنوایی صلب نقل قول یابلو	Uniform Yablo Disquotation Principle
اصل یکنوایی نقطه ثابت یابلو	Uniform Fixed Point Yablo Principle
اصول نظریه درستی	Truth theoreticl Principles
بازگشتی مقدماتی	Primitive Recursive
بازنوشت مرتبه دوم	Second order rewriting
بسط دادن	Expand
تساوی	Identity
تعبیر	Interpret
تناقض	Contradiction
تناقض معنایی	Semantic Antinomy
تناهی	Finiteness
جازم	Categorical
حالت	Sense
حساب	Calculus
دنباله	Sequence
دوری	Circular

رسیدن به تناقض .... Derive falsum
سازگاری .... Consistent
سور عمومی .... Universal quantifier
صوری سازی .... Formalization
طرح استقرا .... Induction Schema
طرح اصل موضوعی تصریح .... Comprehension Schema
طرح موضعی حساب صلب نقل قول .... Local Arithmetic Disquotation Scheme
طرح یکنوایی همگن .... Uniform Homogeneous Scheme
ظاهر ساده .... Simpliciter
عبارت .... Expression
فراقضیه .... Metatheorem
فشردگی .... Compactness
قابل اشتقاق .... Derivable
قاعده .... Rule
قطری سازی .... Diagonalization
گزاره .... Statement
محمول درستی .... Truth predicate
مستدل .... Reasonable
نسخه .... Version
نقطه‌ی ثابت .... Fixed point
نماد غیر منطقی .... Non logical vocabulary
نسبت دادن .... Assigning
هسته .... Core

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

نسبت دادن	Assigning
اصل بندی	Axiomatization
حساب	Calculus
جازم	Categorical
دوری	Circular
فشردگی	Compactness
طرح اصل موضوعی تصریح	Comprehension Schema
سازگاری	Consistent
تناقض	Contradiction
هسته	Core
قابل اشتقاق	Derivable
رسیدن به تناقض	Derive falsum
قطری سازی	Diagonalization
بسط دادن	Expand
عبارت	Expression
تناهی	Finiteness
نقطه‌ی ثابت	Fixed point
صوری سازی	Formalization

Identity	تساوی
Induction Schema	طرح استقرا
Interpret	تعبیر
Local Arithmetic Disquotation Scheme	طرح موضعی حساب صلب نقل قول
Local Yablo Disquotation Principle	اصل موضعی صلب نقل قول یابلو
Metatheorem	فراقضیه
Non logical vocabulary	نماد غیر منطقی
Primitive Recursive	بازگشتی مقدماتی
Reasonable	مستدل
Rule	قاعده
Second order rewriting	بازنوشت مرتبه دوم
Semantic Antinomy	تناقض معنایی
Sense	حالت
Sequence	دنباله
Simpliciter	ظاهر ساده
Statement	گزاره
Truth predicate	محمول درستی
Truth theoreticl Principles	اصول نظریه درستی
Uniform Fixed Point Yablo Principle	اصل یکنوایی نقطه ثابت یابلو
Uniform Homogeneous Scheme	طرح یکنوایی همگن
Uniform Yablo Disquotation Principle	اصل یکنوایی صلب نقل قول یابلو
Universal quantifier	سور عمومی
Version	نسخه

نمایه

Surname: Tareeghee **Name:** Mohammad Amin

Title: Yablo's Paradox in Second-Order Logic

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Hazhir Homei

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2016 **Number of Pages:** 54

Keywords: Paradoxicality, Consistency, ω-Inconsistency, Second-Order Languages, Unsatisfiability, Finiteness.

Abstract

Stephen Yablo introduced a new informal paradox, constituted by an infinite list of semi-formalized sentences. It has been shown that, formalized in a first-order language, Yablo's piece of reasoning is invalid, for it is impossible to derive falsum from the sequence, due mainly to the Compactness Theorem. This result casts doubts on the paradoxical character of the list of sentences. After identifying two usual senses in which an expression or set of expressions is said to be paradoxical, since second-order languages are not compact, the paradoxicality of Yablo's list within these languages is studied. While non-paradoxical in the first sense, the second-order version of the list is a paradox in our second sense. It is concluded that this suffices for regarding Yablo's original list as paradoxical and his informal argument as valid.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Yablo's Paradox in Second-Order Logic

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Hazhir Homei

By

Mohammad Amin Tareeghee

2016